

EXERCICE 1

1. a) Le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées $(-3, -4, 1)$ et le vecteur \vec{AC} a pour coordonnées $(-5, 2, -7)$. S'il existe un réel k tel que $\vec{AC} = k\vec{AB}$, alors on a à la fois $-3k = -5$ et $-4k = 2$ ou encore $k = \frac{5}{3}$ et $k = -\frac{1}{2}$. Ceci est impossible et donc les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times (-3) - 1 \times (-4) - 1 \times 1 = -3 + 4 - 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times (-5) - 1 \times 2 - 1 \times (-7) = -5 - 2 + 7 = 0$.
Donc le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} . Ainsi, le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux droites sécantes du plan (ABC) et donc

le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC).

c) Le plan (ABC) est le plan passant par A de vecteur normal \vec{n} .
Une équation cartésienne de ce plan est $1 \times (x - 1) - 1 \times (y - (-2)) - 1 \times (z - 4) = 0$ ou encore $x - y - z + 1 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $-x + y + z = 1$.

2. a) La droite passant par O est orthogonale au plan (ABC) est la droite passant par O de vecteur directeur \vec{n} . Une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases} x = k \\ y = -k \\ z = -k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$. On note \mathcal{D} cette droite.

b) Le point O' est l'intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (ABC). Soit $M(k, -k, -k)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de \mathcal{D} .

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow -k - k - k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}.$$

Quand $k = -\frac{1}{3}$, on obtient les coordonnées du point $O' : \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Les coordonnées de O' sont $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3. a) Soit t le réel tel que $\vec{BH} = t\vec{BC}$. On a

$$\begin{aligned} t \|\vec{BC}\|^2 &= (t\vec{BC}) \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{BC} = (\vec{BO} + \vec{OH}) \cdot \vec{BC} = \vec{BO} \cdot \vec{BC} + \vec{OH} \cdot \vec{BC} \\ &= \vec{BO} \cdot \vec{BC} \quad (\text{car } \vec{OH} \text{ et } \vec{BC} \text{ sont orthogonaux}). \end{aligned}$$

Puisque $\|\vec{BC}\|^2 \neq 0$, on a montré que

$$t = \frac{\vec{BO} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2}.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = (0 - (-2))(-4 - (-2)) + (0 - (-6))(0 - (-6)) + (0 - 5)(-3 - 5) = -4 + 36 + 40 = 72.$$

$$\text{Puis } \|\overrightarrow{BC}\|^2 = (-4 - (-2))^2 + (0 - (-6))^2 + (-3 - 5)^2 = 4 + 36 + 64 = 104 \text{ et donc } t = \frac{72}{104} = \frac{9}{13}.$$

Les coordonnées du point H sont $(x_B + tx_{\overrightarrow{BC}}, y_B + ty_{\overrightarrow{BC}}, z_B + tz_{\overrightarrow{BC}})$ ou encore $\left(-2 + \frac{9}{13} \times (-2), -6 + \frac{9}{13} \times 6, 5 + \frac{9}{13} \times (-8)\right)$

ou enfin $\left(-\frac{44}{13}, -\frac{24}{13}, -\frac{7}{13}\right)$.

Les coordonnées de H sont $\left(-\frac{44}{13}, -\frac{24}{13}, -\frac{7}{13}\right)$.

EXERCICE 2

1. On note R l'événement « la boule tirée est rouge » et U l'événement « la boule tirée porte le n° 1 ». L'événement « la boule tirée est verte » est l'événement \bar{R} et l'événement « la boule tirée porte le n° 2 » est l'événement \bar{U} . L'énoncé donne $p(R \cap U) = p(U) = 0,2$ et donc $p(\bar{U}) = 1 - p(U) = 0,8$ puis $p_{\bar{U}}(R) = 0,1$. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire

$$p(R) = p(R \cap U) + p(R \cap \bar{U}) = p(R \cap U) + p(\bar{U}) \times p_{\bar{U}}(R) = 0,2 + 0,8 \times 0,1 = 0,28.$$

La probabilité que la boule tirée soit rouge est 0,28.

2. La probabilité demandée est $p_R(\bar{U})$.

$$p_R(\bar{U}) = \frac{p(R \cap \bar{U})}{p(R)} = \frac{p(\bar{U}) \times p_{\bar{U}}(R)}{p(R)} = \frac{0,8 \times 0,1}{0,28} = \frac{0,08}{0,28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$$

La probabilité que la boule tirée porte le n° 2 sachant qu'elle est rouge est $\frac{2}{7}$.

3. a) Notons X le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes (les tirages se faisant avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est rouge et porte le n° 1 » avec une probabilité $p = 0,2$ ou son contraire avec une probabilité $1 - p = 0,8$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 1)$ et on a

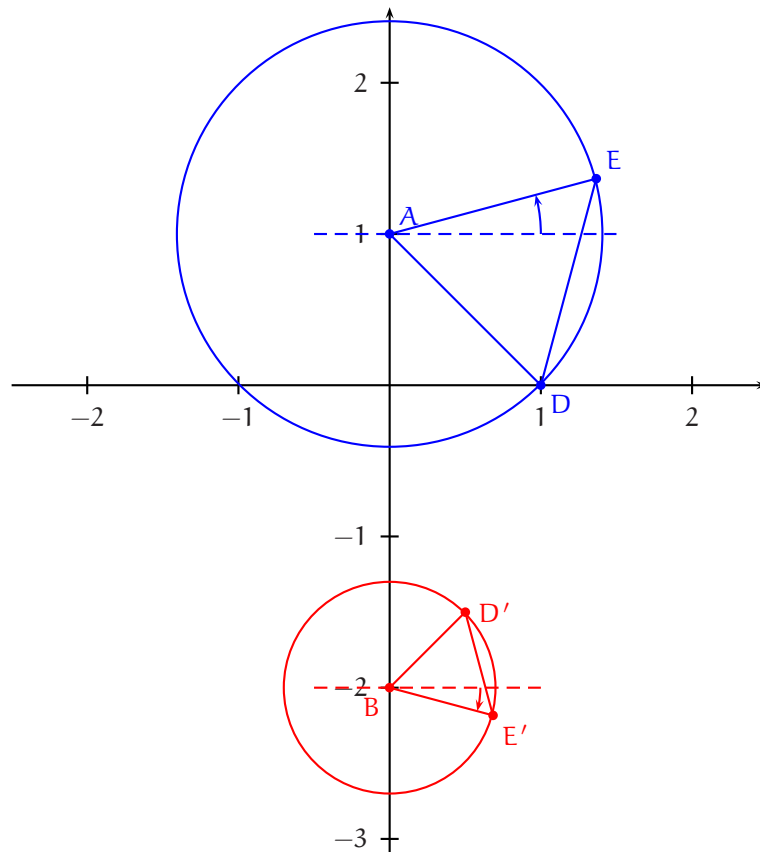
$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,8^n.$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - 0,8^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln(0,01) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,8) \leq \ln(0,01) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 20,6\dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99 à partir de $n = 21$.

EXERCICE 3



1. Le point E est l'image du point D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Donc

$$\begin{aligned} z_E &= z_A + e^{i\pi/3}(z_D - z_A) = i + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i) = i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i). \end{aligned}$$

$$z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i).$$

2. $z_{D'} = \frac{2z_D - i}{iz_D + 1} = \frac{2 - i}{1 + i} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - 1 - 2i - i}{1^2 + 1^2} = \frac{1 - 3i}{2}.$

$$z_{D'} = \frac{1 - 3i}{2}.$$

3. a) Soit z un nombre complexe différent de i .

$$(z' + 2i)(z - i) = \left(\frac{2z - i}{iz + 1} + 2i\right)(z - i) = \frac{2z - i - 2z + 2i}{iz + 1}(z - i) = \frac{i(z - i)}{iz + 1} = \frac{iz + 1}{iz + 1} = 1.$$

$$\text{Pour tout } z \neq i, (z' + 2i)(z - i) = 1.$$

- b) Soient z un nombre complexe différent de i puis M le point d'affixe z .

• $BM' \times AM = |z' - z_B| \times |z - z_A| = |z' + 2i| \times |z - i| = |(z' + 2i)(z - i)| = |1| = 1.$

$$\bullet \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'} \right) = \arg \left(z_{\overrightarrow{BM'}} \right) + 2k\pi = \arg(z' + 2i) + 2k\pi = \arg \left(\frac{1}{z - i} \right) + 2k\pi = -\arg(z - i) + 2k\pi = -\arg \left(z_{\overrightarrow{AM}} \right) + 2k\pi = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM} \right) + 2k\pi.$$

Pour tout $M \neq A$, $BM' \times AM = 1$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'} \right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM} \right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. a) Puisque le triangle ADE est équilatéral,

$$AE = AD = |z_D - z_A| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Les points D et E sont sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) $BE' \times AE = 1$ et donc $BE' = \frac{1}{AE} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Le point E' est sur le cercle de centre B et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ensuite, $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BE'} \right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AE} \right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit une construction du point E' fournie sur le graphique en tout début de solution.

5. $BD' = \frac{1}{AD} = \frac{1}{AE} = BE'$ et

$$\left(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'} \right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{BE'} \right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{BD'} \right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AE} \right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AD} \right) = -\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Par suite,}$$

le triangle BD'E' est équilatéral indirect.

EXERCICE 4

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x \neq 0$ et $e^x + 7 \neq 0$ puis $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7} = \frac{4e^x}{e^x \left(1 + \frac{7}{e^x}\right)} = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

Pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

2. a) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 7 = 7$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 7} = 0$. On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 7e^{-x} = 1$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + 7e^{-x}} = 4$. On en déduit que la droite d'équation $y = 4$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

b) La fonction f_1 est dérivable sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} . De plus, pour tout réel x ,

$$f_1'(x) = 4 \frac{-(1 + 7e^{-x})'}{(1 + 7e^{-x})^2} = 4 \frac{-(-7e^{-x})}{(1 + 7e^{-x})^2} = \frac{28e^{-x}}{(1 + 7e^{-x})^2} > 0.$$

On en déduit que

la fonction f_1 est strictement croissante sur \mathbb{R} .

c) Puisque la fonction f_1 est strictement croissante sur \mathbb{R} , pour tout réel x , on a $\lim_{t \rightarrow -\infty} f_1(t) < f_1(x) < \lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(t)$ ou encore $0 < f_1(x) < 4$.

3. a) Soit x un réel. Alors, $2x_{I_1} - x \in \mathbb{R}$ et

$$f_1(2x_{I_1} - x) = \frac{4}{1 + 7e^{-(2 \ln 7 - x)}} = \frac{4}{1 + 7(e^{\ln 7})^{-2} e^x} = \frac{4}{1 + \frac{e^x}{7}} = \frac{28}{e^x + 7},$$

puis

$$f_1(2x_{I_1} - x) + f_1(x) = \frac{28}{e^x + 7} + \frac{4e^x}{e^x + 7} = \frac{4(e^x + 7)}{e^x + 7} = 4 = 2y_{I_1}.$$

En résumé, pour tout réel x , $f_1(2x_{I_1} - x) + f_1(x) = 2y_{I_1}$ et donc

le point $I_1(\ln 7, 2)$ est centre de symétrie de C_1 .

b) Une équation de la tangente à la courbe C_1 en I_1 est $y = f_1'(x_{I_1})(x - x_{I_1}) + f_1(x_{I_1})$ avec

• $x_{I_1} = \ln 7$,

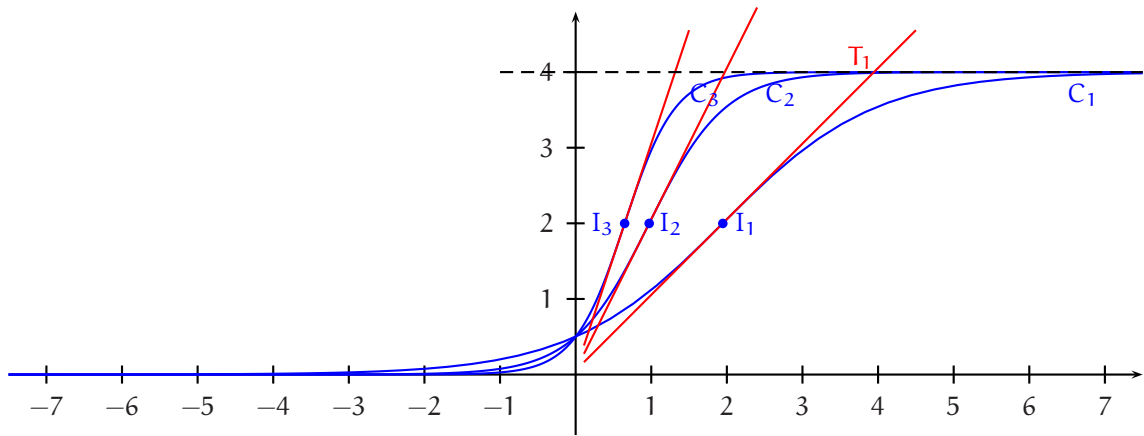
• $f_1(x_{I_1}) = \frac{4e^{\ln 7}}{e^{\ln 7} + 7} = \frac{28}{14} = 2$,

• $f_1'(x_{I_1}) = \frac{28e^{-\ln 7}}{(1 + 7e^{-\ln 7})^2} = \frac{\frac{28}{7}}{\left(1 + \frac{7}{7}\right)^2} = 1$.

Une équation de la tangente à la courbe C_1 en I_1 est donc $y = x - \ln 7 + 2$.

Une équation de la tangente à la courbe C_1 en I_1 est donc $y = x - \ln 7 + 2$.

c) Représentation graphique.



4. a) La fonction f_1 est continue sur \mathbb{R} et admet donc des primitives sur \mathbb{R} . De plus, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{4(e^x + 7)'}{e^x + 7}$ avec pour tout réel x , $e^x + 7 > 0$. Donc une primitive de f_1 sur \mathbb{R} est la fonction $F_1 : x \mapsto 4 \ln(e^x + 7)$.

b) La valeur moyenne de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0, \ln 7]$ est :

$$\frac{1}{\ln 7} \int_0^{\ln 7} f_1(x) dx = \frac{1}{\ln 7} [4 \ln(e^x + 7)]_0^{\ln 7} = \frac{4}{\ln 7} (\ln(e^{\ln 7} + 7) - \ln(e^0 + 7)) = 4 \frac{\ln 14 - \ln 8}{\ln 7}.$$

La valeur moyenne de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0, \ln 7]$ est $4 \frac{\ln 14 - \ln 8}{\ln 7}$.

Partie B

1. Soit n un entier naturel non nul. $f_n(0) = \frac{4e^0}{e^0 + 7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Donc,

pour tout entier naturel non nul n , le point $A \left(0, \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n .

2. a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x ,

$$f_n(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7} = 2 \Leftrightarrow 4e^{nx} = 2(e^{nx} + 7) \Leftrightarrow 2e^{nx} = 14 \Leftrightarrow e^{nx} = 7 \Leftrightarrow nx = \ln 7 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 7}{n}.$$

$$I_n \left(\frac{\ln 7}{n}, 2 \right).$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x_{I_n} = \frac{\ln 7}{n}$, $f(x_{I_n}) = 2$. Ensuite, pour tout réel x ,

$$f'_n(x) = 4 \frac{ne^{nx}(e^{nx} + 7) - e^{nx}(ne^{nx})}{(e^{nx} + 7)^2} = \frac{28ne^{nx}}{(e^{nx} + 7)^2}$$

$$\text{et donc } f'(x_{I_n}) = \frac{28ne^{n \frac{\ln 7}{n}}}{\left(e^{n \frac{\ln 7}{n}} + 7\right)^2} = \frac{28 \times 7n}{(7 + 7)^2} = n.$$

Une équation de T_n est donc $y = n \left(x - \frac{\ln 7}{n}\right) + 2$ ou encore $y = nx - \ln 7 + 2$.

c) Voir graphique.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \frac{4}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} \frac{ne^{nx}}{e^{nx} + 7} dx = \frac{4}{\ln 7} [\ln(e^{nx} + 7)]_0^{\frac{\ln 7}{n}} = \frac{4}{\ln 7} (\ln(e^{\ln 7} + 7) - \ln(e^0 + 7)) = 4 \frac{\ln 14 - \ln 8}{\ln 7}.$$

Pour tout entier naturel non nul n , $u_n = 4 \frac{\ln 14 - \ln 8}{\ln 7}$.