

**EXERCICE 1**

**Partie A**

1) a) Puisque pour tout réel  $x$  de  $] - 1, +\infty[$  on a  $x + 1 > 0$ , la fonction  $x \mapsto \ln(x + 1)$  est dérivable sur  $] - 1, +\infty[$ . Il en est de même de  $f$  et pour tout réel  $x$  de  $] - 1, +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

La fonction  $f'$  est strictement positive sur  $] - 1, +\infty[$  et donc

la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] - 1, +\infty[$ .

b) •  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \ln(x + 1) = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \ln(X) = -\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2) a)  $\lim_{x \rightarrow -1} 1 - x = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1 + x) = -\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (\ln(1 + x) + 1 - x) = -\infty$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x)}{1 + x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$  d'après un théorème de croissances comparées.

Maintenant, pour tout réel  $x$  de  $] - 1, +\infty[$ , on a  $x + 1 \neq 0$  puis  $g(x) = -x + 1 + \ln(1 + x) = (x + 1) \left( \frac{-x + 1}{x + 1} + \frac{\ln(1 + x)}{x + 1} \right)$

(\*).

Pour  $x > 0$ ,  $\frac{-x + 1}{x + 1} = \frac{-x}{x} \times \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -1$ .

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x + 1}{x + 1} + \frac{\ln(1 + x)}{x + 1} \right) = -1$ . Comme d'autre part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$ , L'égalité (\*) nous permet d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

c) La fonction  $g$  est dérivable sur  $] - 1, +\infty[$  en tant que somme de deux fonctions dérivables sur  $] - 1, +\infty[$  et pour tout  $x > -1$ ,

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{x+1}.$$

Pour tout réel  $x$  de  $] - 1, +\infty[$ , on a  $x + 1 > 0$  et donc  $g'(x)$  est du signe de  $-x$ . On en déduit le tableau de variations de la fonction  $g$ .

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		+ 0 -	
g		1	

d) La fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $] -1, 0]$ . Donc pour tout réel  $k$  de  $] \lim_{x \rightarrow -1} g(x), g(0) ] = ] -\infty, 1]$ , l'équation  $g(x) = k$  admet une solution et une seule dans  $] -1, 0]$ . En particulier, l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule dans  $] -1, 0]$ . On note  $\alpha$  cette solution. Puisque  $g(0) = 1 \neq 0$ , on a  $\alpha \neq 0$  et donc  $\alpha \in ] -1, 0[$ .

De même, la fonction  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Donc pour tout réel  $k$  de  $] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0) ] = ] -\infty, 1]$ , l'équation  $g(x) = k$  admet une solution et une seule dans  $[0, +\infty[$ . En particulier, l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule dans  $[0, +\infty[$ . On note  $\beta$  cette solution. On a  $g(2) = \ln(3) - 1 = 0,09\dots > 0$  et  $g(3) = \ln(4) - 2 = -0,6\dots < 0$ . Ainsi,  $g(2) > g(\beta) > g(3)$  et puisque la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ , on a  $2 < \beta < 3$ . On a montré que  $\beta \in [2, 3]$ .

e) La fonction  $g$  est strictement croissante sur  $] -1, \alpha]$ . Donc, pour tout  $x$  de  $] -1, \alpha[$ , on a  $g(x) < g(\alpha) = 0$ . Ainsi, la fonction  $g$  est strictement négative sur  $] -1, \alpha[$ .

De même, la fonction  $g$  est strictement positive sur  $] \alpha, 0]$ , strictement positive sur  $[0, \beta[$  et strictement négative sur  $] \beta, +\infty[$ . En résumé,

la fonction  $g$  est strictement négative sur  $] -1, \alpha[$  et sur  $] \beta, +\infty[$ , strictement positive sur  $] \alpha, \beta[$  et s'annule en  $\alpha$  et  $\beta$ .

Le signe de  $g(x) = f(x) - x$  fournit la position relative de la courbe  $C_f$  et de la droite  $D$  :

$C_f$  est strictement au-dessous de  $D$  sur  $] -1, \alpha[$  et sur  $] \beta, +\infty[$ , strictement au-dessus de  $D$  sur  $] \alpha, \beta[$  et  $C_f$  coupe  $D$  aux points d'abscisses  $\alpha$  et  $\beta$ .

## Partie B

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  existe et  $2 \leq u_n \leq \beta$ .

• Puisque  $u_0 = 2$ , c'est vrai pour  $n = 0$ .

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $u_n$  existe et  $2 \leq u_n \leq \beta$ . Puisque  $[2, \beta] \subset ] -1, +\infty[$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  existe.

Maintenant, puisque la fonction  $f$  est croissante sur  $] -1, +\infty[$  et que  $2 \leq u_n \leq \beta$ , on en déduit que  $f(2) \leq f(u_n) \leq f(\beta)$  ou encore que  $f(2) \leq u_{n+1} \leq \beta$  (l'égalité  $g(\beta) = 0$  fournit  $f(\beta) = \beta$ ). Mais  $f(2) = 1 + \ln(3) = 2,09 \geq 2$  et donc  $2 \leq u_{n+1} \leq \beta$ .

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel  $n$ ,  $2 \leq u_n \leq \beta$ .

2) Etudions le sens de variations de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$ . Or  $u_n \in [2, \beta]$  et, d'après la question 2)e) de la partie A, on a  $g(u_n) \geq 0$  ou encore  $u_{n+1} \geq u_n$ .

On a montré que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$  et donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par  $\beta$  d'après la question précédente. Donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers un certain réel  $\ell$  de l'intervalle  $[2, \beta]$ .

De plus,  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \ln(1 + u_n)) = 1 + \ln(1 + \ell)$  et donc le réel  $\ell$  est une solution de l'équation  $f(x) = x$  ou encore de l'équation  $g(x) = 0$  et appartient à  $[2, \beta]$ . Comme l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans  $[2, \beta]$ , à savoir  $\beta$ , on en déduit que  $\ell = \beta$ . On a montré que

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\beta$ .

## EXERCICE 2

### Partie I

1) A chaque lancer, la probabilité d'obtenir une face noire est  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Puisque les lancers sont effectués de manière indépendante, la probabilité d'obtenir deux faces noires c'est-à-dire une face noire à chaque lancer est  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ .

La probabilité d'obtenir deux faces noires est  $\frac{1}{9}$ .

2) De même, la probabilité d'obtenir deux faces vertes est  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$  et la probabilité d'obtenir deux faces rouges est  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . Donc

$$p(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{4 + 1 + 9}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}.$$

$$p(C) = \frac{7}{18}.$$

3) L'événement « les deux faces obtenues sont de couleurs différentes » est l'événement  $\bar{C}$  et  $p(\bar{C}) = 1 - p(C) = \frac{11}{18}$ .

$$p(\bar{C}) = \frac{11}{18}.$$

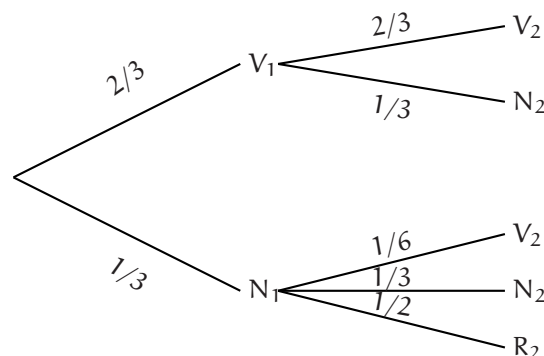
4) Notons  $V$  l'événement « les deux faces obtenues sont vertes ». La probabilité demandée est  $p_C(V)$ . Or

$$p_C(V) = \frac{p(V \cap C)}{p(C)} = \frac{p(V)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{7}{18}} = \frac{18}{7 \times 36} = \frac{1}{7 \times 2} = \frac{1}{14}.$$

$$p_C(V) = \frac{1}{14}.$$

### Partie II

1) a) On note  $V_1, V_2, N_1, \dots$ , les probabilités d'obtenir une face verte au premier lancer, au deuxième lancer, une face noire au premier lancer ... Représentons alors la situation par un arbre.



b) Puisqu'on a obtenu une face verte au premier lancer, on a relancé le dé B avec une probabilité  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  d'obtenir une face verte au deuxième lancer.

$$p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3}.$$

2) La probabilité demandée est  $p(V_1 \cap V_2)$ . Or

$$p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

**3)** La probabilité demandée est  $p(V_2)$ . D'après la formule des probabilités totales,  $p(V_2) = p(V_1 \cap V_2) + p(N_1 \cap V_2)$ . On sait déjà que  $p(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{9}$ . Ensuite,

$$p(N_1 \cap V_2) = p(N_1) \times p_{N_1}(V_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Finalement,  $p(V_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ .

La probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer est  $\frac{1}{2}$ .

### EXERCICE 3

#### Partie A

1) La fonction  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  en tant que quotient de fonctions dérivables sur  $]0, +\infty[$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$ . De plus, pour  $x > 0$ ,

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x^2 e^{2x}}{x^2} = e^{2x}.$$

2) Mais alors, il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x > 0$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$  puis  $f(x) = xg(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx$ . En résumé, si  $f$  vérifie la condition (E) alors il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x > 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx$ .

Réciproquement, s'il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x > 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx$ , alors la fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour  $x > 0$ ,

$$xf'(x) - f(x) = x \left( \frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} + C \right) - \left( \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx \right) = x^2 e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx - \frac{1}{2}xe^{2x} - Cx = x^2 e^{2x},$$

et donc la fonction  $f$  vérifie la condition (E).

Les fonctions  $f$  vérifiant la condition (E) sont les fonctions définies sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx$  où  $C$  est un réel.

3) Soient  $C$  un réel puis  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx$ .

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{e}{2} + \frac{C}{2} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{e}{2}.$$

La fonction définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en  $\frac{1}{2}$  est la fonction définie pour tout réel  $x > 0$  par  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$ .

#### Partie B

1) On sait déjà que  $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . Ensuite, pour tout réel  $x \geq 0$ ,

$$h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x = \frac{x}{2}(e^{2x} - e).$$

Pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\frac{x}{2} > 0$  et donc, pour tout réel  $x > 0$ ,  $h(x)$  est du signe de  $e^{2x} - e$ . Or

$$\begin{aligned} e^{2x} - e > 0 &\Leftrightarrow e^{2x} > e^1 \Leftrightarrow 2x > 1 \text{ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Enfin,  $h(0) = 0$  et finalement

la fonction  $h$  est strictement négative sur  $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ , strictement positive sur  $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$  et s'annule en 0 et  $\frac{1}{2}$ .

2) a) Pour  $x$  dans  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ , posons  $u(x) = x$  et  $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  et pour  $x$  dans  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  on a

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v(x) &= \frac{1}{2}e^{2x} \\ u'(x) &= 1 & v'(x) &= e^{2x} \end{aligned}$$

De plus, les fonctions  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx = \left[ x \times \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^1 - 0 - \left[ \frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} e - \left( \frac{1}{4} e - \frac{1}{4} e^0 \right) = \frac{1}{4}$$

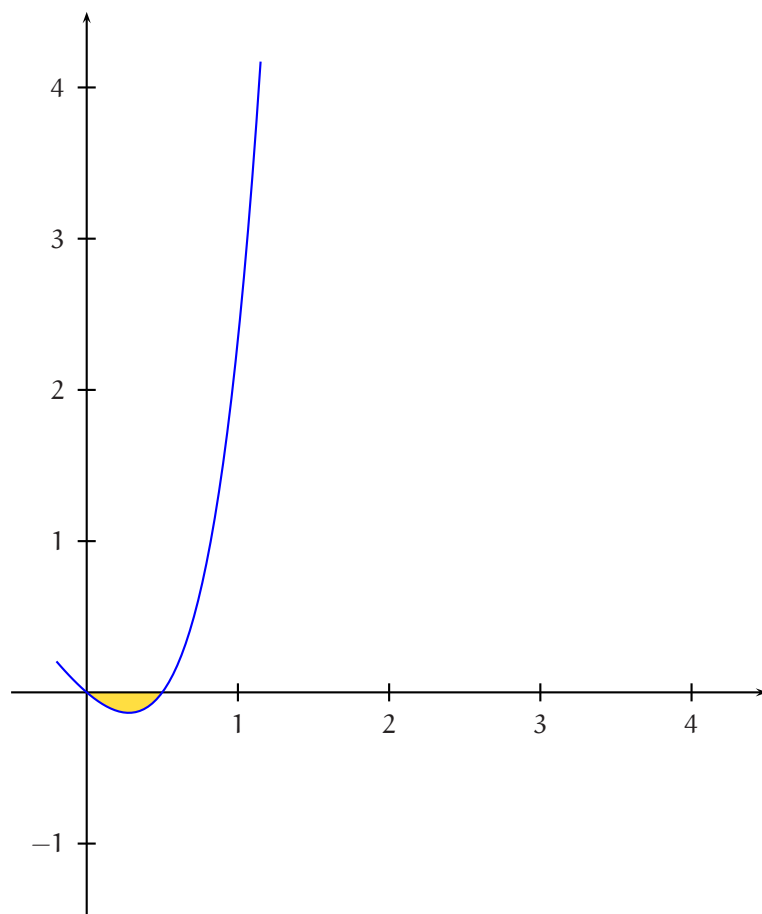
Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx - \frac{e}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{8} - \frac{e}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{e}{16} = \frac{2-e}{16}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx = \frac{2-e}{16}$$

b) D'après la question 1), la fonction  $h$  est négative sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  et est strictement positive sur  $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ . L'aire demandée est donc

$$-\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx = \frac{e-2}{16} = 0,04\dots$$



## EXERCICE 4

### Partie I Restitution organisée de connaissances

Puisque  $A \neq B$  et  $A \neq C$ ,  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  existe et  $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$  existe. Ensuite,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi].$$

### Partie II

1) a) On continue à noter  $a, b, \dots$  les affixes des points  $A, B, \dots$

$$b' = \frac{b-1-i}{b} = \frac{i-1-i}{i} = -\frac{1}{i} = -\frac{-i}{i \times (-i)} = i.$$

$$b' = i = b.$$

b) Soit  $z$  un nombre complexe non nul.  $z' - 1 = \frac{z-1-i}{z} - 1 = -\frac{1+i}{z} \neq 0$ . Donc

pour tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle, on a  $z' \neq 1$ .

2) Soit  $M$  un point du plan d'affixe non nulle  $z$ .

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-(1+i)|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |z-z_A| = |z| \Leftrightarrow MA = MO \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA],$$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice de  $[OA]$  privée du point  $O$ , c'est-à-dire la médiatrice de  $[OA]$ ,  $O$  n'appartenant pas à la médiatrice de  $[OA]$ .

L'ensemble des points  $M$  tels que  $|z'| = 1$  est la médiatrice du segment  $[OA]$ .

Déterminons une équation cartésienne de cette médiatrice. On note  $(x, y)$  les coordonnées du point  $M$ .

$$MA = MO \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow -2x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

Une équation de la médiatrice du segment  $[OA]$  est  $y = -x + 1$ .

3) Soit  $M$  un point du plan d'affixe non nulle  $z$ .

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z' = 0 \text{ ou } (z' \neq 0 \text{ et } \arg(z') = 0 [\pi]) \Leftrightarrow z = 1+i \text{ ou } (z \neq 1+i \text{ et } \arg\left(\frac{z-(1+i)}{z}\right) = 0 [\pi])$$

$$\Leftrightarrow M = A \text{ ou } (M \neq A \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}) = 0 [\pi])$$

$$\Leftrightarrow M = A \text{ ou } (M \neq A \text{ et } O, A \text{ et } M \text{ alignés})$$

$$\Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite } (OA) \text{ privée du point } O.$$

L'ensemble des points  $M$  tels que  $z' \in \mathbb{R}$  est la droite  $(OA)$  privée du point  $O$ .

Une équation cartésienne de la droite  $(OA)$  est  $y = x$ .