BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Pondichery

EXERCICE 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ telles que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. Alors, pour tout réel t de $[a, b]$, $g(t) - f(t) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t))\ dt \geqslant 0$ puis par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$ et donc que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$.

Partie B

1. a. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + x) = \lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty.}$$

b. 1ère solution. La fonction $x \mapsto 1 + x$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $y \mapsto \ln(y)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc la fonction $f_1\ :\ x \mapsto \ln(1 + x)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2ème solution. Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, on a $1 + x > 0$. Donc, la fonction f_1 est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$f_1'(x) = \frac{1}{1 + x} > 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f_1 \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

c. 1ère solution. Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = \ln(1 + x)$ et $v(x) = x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$ on a

$$u(x) = \ln(1 + x) \qquad v(x) = x$$
$$u'(x) = \frac{1}{1 + x} \qquad v'(x) = 1$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_1(x)\ dx &= \int_0^1 1 \times \ln(x + 1)\ dx = [x\ln(x + 1)]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{1}{x + 1}\ dx = \ln 2 - 0 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x + 1}\right) dx \\ &= \ln 2 - [x - \ln(x + 1)]_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2 - 0) = 2\ln 2 - 1.\end{aligned}$$

2ème solution. Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = \ln(1 + x)$ et $v(x) = x + 1$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$ on a

$$u(x) = \ln(1+x) \qquad v(x) = x+1$$
$$u'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad v'(x) = 1$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 1 \times \ln(1+x)\,dx = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 (x+1) \times \frac{1}{x+1}\,dx = 2\ln 2 - 0 - \int_0^1 1\,dx \\ &= 2\ln 2 - 1.\end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 2\ln 2 - 1.}$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x+1 \geqslant 1$ et donc $f_1(x) = \ln(x+1) \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f_1 est continue et positive sur $[0,1]$. On sait alors que le nombre I_1 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$, l'axe des abscisses et la courbe C_1.

2. a. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout x de $[0,1]$, on a $1 \leqslant 1+x^n \leqslant 2$ et donc $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln 2$ par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$.

Par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 \ln 2\,dx$ avec $\int_0^1 \ln 2\,dx = (1-0)\times\ln 2 = \ln 2$.

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2.}$$

b. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x \leqslant 1$ puis $x^{n+1} \leqslant x^n$ après multiplication des deux membres de l'inégalité par le réel positif x^n.
Par suite, pour tout réel x de $[0,1]$, $1+x^{n+1} \leqslant 1+x^n$ puis $\ln(1+x^{n+1}) \leqslant \ln(1+x^n)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 \ln(1+x^{n+1})\,dx \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$ et donc que $I_{n+1} \leqslant I_n$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$$

c. La suite (I_n) est décroissante d'après b) et minorée par 0 d'après a). Donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est convergente.}}$$

3. a. La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} \leqslant 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est décroissante sur } [0,+\infty[.}$$

b. La fonction g est décroissante sur $[0,+\infty[$. Par suite, pour tout $x \geqslant 0$, on a $g(x) \leqslant g(0)$ ou encore $g(x) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est négative sur } [0,+\infty[.}$$

On en déduit que pour tout réel t de $[0,+\infty[$, $\ln(1+t) - t \leqslant 0$ ou encore $\ln(1+t) \leqslant t$. Soient alors n un entier naturel non nul et x un réel positif. Le réel $t = x^n$ est encore un réel positif et d'après ce qui précède, on a $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n \text{ et tout réel positif } x,\ \ln(1+x^n) \leqslant x^n.}$$

c. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

EXERCICE 2

Proposition 1.	**Vrai**
Proposition 2.	**Faux**
Proposition 3.	**Vrai**
Proposition 4.	**Vrai**
Proposition 5.	**Faux**

Justifications.

Proposition 1. La droite D de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, -2, 3)$. Le plan P d'équation cartésienne $x + 2y + z - 3 = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, 2, 1)$. Ensuite,

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 1 \times 1 + (-2) \times 2 + 3 \times 1 = 0.$$

Donc la droite D est parallèle au plan P. La proposition 1 est vraie.

Proposition 2. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in P \cap P' \cap P'' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \\ 4x - y + 4z = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y - 3z + 3 \\ 2(2y - 3z + 3) + 3y - 2z = 6 \\ 4(2y - 3z + 3) - y + 4z = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y - 3z + 3 \\ 7y - 8z = 0 \\ 7y - 8z = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y - 3z + 3 \\ 7y - 8z = 0 \end{array}\right.$$

Par suite, le point de coordonnées $(3, 0, 0)$ appartient aux trois plans. La proposition 2 est donc fausse.

Proposition 3. Les deux droites D de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, et D′ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$, sont sécantes si et seulement si il existe deux réels t et u tels que $\left\{\begin{array}{l} 2 - 3t = 7 + 2u \\ 1 + t = 2 + 2u \\ -3 + 2t = -6 - u \end{array}\right.$ ou encore si et seulement si le système $\left\{\begin{array}{l} 2 - 3t = 7 + 2u \\ 1 + t = 2 + 2u \\ -3 + 2t = -6 - u \end{array}\right.$ d'inconnues t et u admet au moins un couple (t, u) solution.
Or

$$\left\{\begin{array}{l} 2 - 3t = 7 + 2u \\ 1 + t = 2 + 2u \\ -3 + 2t = -6 - u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 2u + 1 \\ 2 - 3(2u + 1) = 7 + 2u \\ -3 + 2(2u + 1) = -6 - u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 2u + 1 \\ u = -1 \\ u = -1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = -1 \\ t = -1 \end{array}\right.$$

Donc, les droites D et D′ sont sécantes (en le point de coordonnées $(5, 0, -5)$) et la proposition 3 est vraie.

Proposition 4. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2, 4, -2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(4, -4, -4)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C définissent un unique plan. Ensuite,

- $x_A + z_A = -1 + 2 = 1$,
- $x_B + z_B = 1 + 0 = 1$
- $x_C + z_C = 3 - 2 = 1$.

Ainsi, les trois points A, B et C appartiennent au plan d'équation $x + z = 1$ et donc le plan (ABC) est le plan d'équation $x + z = 1$. La proposition 4 est vraie.

Proposition 5. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3, 0, -3)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(5, -2, 2)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, on doit avoir $-2 = t \times 0$ ce qui est impossible. Donc le point C n'appartient pas à la droite (AB) ou encore le point C n'est pas un barycentre des points A et B. La proposition 5 est fausse.

EXERCICE 3

1. a. $X = -1$ correspond à l'événement « le joueur tire une boule blanche et une boule rouge ». L'urne contient $n+10$ boules. Il y a donc $(n+10)(n+9)$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne.
Ensuite, il y a $10 \times n$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que la première boule tirée est blanche et la deuxième est rouge et il y a $n \times 10$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que la première boule tirée est rouge et la deuxième est blanche. Finalement, il y a $10n + 10n = 20n$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que l'une des deux boules est blanche et l'autre est rouge et donc

$$\boxed{P(X=-1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}.}$$

b. Les deux autres valeurs prises par la variable X sont 4 dans le cas où le joueur tire deux boules rouges et -6 dans le cas où le joueur tire deux boules blanches. Il y a 10×9 tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que les deux boules soient blanches et donc $p(X=4) = \dfrac{10 \times 9}{(n+10)(n+9)}$. De même, il y a $n(n-1)$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que les deux boules soient rouges et donc $p(X=-6) = \dfrac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$.

$$\boxed{P(X=-6) = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)},\ P(X=-1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)} \text{ et } P(X=4) = \frac{90}{(n+10)(n+9)}.}$$

c.

$$\begin{aligned}
E(X) &= (-6) \times p(X=-6) + (-1) \times p(X=-1) + 4 \times p(X=4) \\
&= -6\frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)} - \frac{20n}{(n+10)(n+9)} + 4\frac{90}{(n+10)(n+9)} \\
&= \frac{-6n(n-1) - 20n + 360}{(n+10)(n+9)} = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.}$$

d.

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)} > 0 \Leftrightarrow -6n^2 - 14n + 360 > 0 \Leftrightarrow n^2 + \frac{7}{3}n - 60 < 0$$

Maintenant, le discriminant du trinôme $x^2 + \dfrac{7}{3}x - 60$ est $\Delta = \dfrac{49}{9} + 240 = \dfrac{2209}{9} > 0$. Ce trinôme admet deux racines réelles à savoir $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{7}{3} - \dfrac{\sqrt{2209}}{3}\right) = \dfrac{-7-47}{6} = -9 < 0$ et $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{2209}}{6} = \dfrac{20}{3} = 6,6\ldots$.

On sait que $x^2 + \dfrac{7}{3}x - 60 < 0 \Leftrightarrow x \in]x_1, x_2[$. Mais alors, puisque n est un entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow n \in]x_1, x_2[\Leftrightarrow n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\boxed{\text{Les valeurs de } n \text{ pour lesquelles } E(X) > 0 \text{ sont 2, 3, 4, 5 et 6.}}$$

2. Notons Y le nombre de boules rouges obtenues sur 20 tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne. Y suit un schéma de Bernoulli. En effet,

• une même expérience (à savoir tirer une boule de l'urne) à deux éventualités (obtenir une boule rouge ou ne pas obtenir une boule rouge) est effectuée 20 fois de manière indépendante puisque la boule est remise dans l'urne à chaque tirage

• à chaque expérience, la probabilité de tirer une boule rouge est $p = \dfrac{n}{n+10}$ et la probabilité de ne pas tirer une boule rouge est $1 - p = \dfrac{10}{n+10}$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est $p(Y \geqslant 1)$ avec

$$p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{n}{n+10}\right)^0\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
p(Y \geqslant 1) > 0,999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} > 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 0,001 \Leftrightarrow \frac{10}{n+10} < \sqrt[20]{0,001} \Leftrightarrow \frac{n+10}{10} > \frac{1}{\sqrt[20]{0,001}} \\
\Leftrightarrow n + 10 > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} \Leftrightarrow n > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} - 10 \\
\Leftrightarrow n > 4,1\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 5 \text{ (car } n \text{ est entier).}
\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est strictement supérieure à $0,999$ si et seulement si $n \geqslant 5$.

3. a. Soit k un entier naturel.

$$p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01e^{-0,01x}\,dx = \left[0,01 \times \frac{e^{-0,01x}}{-0,01}\right]_0^k = \left[-e^{-0,01x}\right]_0^k = -e^{-0,01k} - (-e^0) = 1 - e^{-0,01k}.$$

Pour $k = 50$, on obtient $p(Z \leqslant 50) = 1 - e^{-0,01\times 50} = 1 - e^{-0,5} = 0,39$ arrondi au centième.

b. La probabilité de mandée est $p(Z \leqslant 60)_{Z>50}$. Or

$$\begin{aligned}
p_{Z>50}(Z \leqslant 60) &= \frac{p((Z \geqslant 60) \cap (Z > 50))}{p(Z > 50)} = \frac{p(50 < Z \leqslant 60)}{p(Z > 50)} = \frac{p(Z \leqslant 60) - p(Z \leqslant 50)}{1 - p(Z \leqslant 50)} \\
&= \frac{(1 - e^{-0,6}) - (1 - e^{-0,5})}{1 - (1 - e^{-0,5})} = \frac{e^{-0,5} - e^{-0,6}}{e^{-0,5}} = 1 - e^{-0,1} \\
&= 0,095 \text{ arrondi au millième.}
\end{aligned}$$

EXERCICE 4

1. • $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$.
• $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}$.
• $u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\frac{14}{27}$.

$$\boxed{u_1 = -\frac{5}{3},\ u_2 = -\frac{14}{9} \text{ et } u_3 = -\frac{14}{27}.}$$

2. **a.** Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
• $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81} \geqslant 0$. L'inégalité est donc vraie quand $n = 4$.
• Soit $n \geqslant 4$. Supposons que $u_n \geqslant 0$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant \frac{1}{3} \times 0 + 4 - 2 \geqslant 0.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 4,\ u_n \geqslant 0.}$$

b. Soit $n \geqslant 5$.

$$u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2 = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geqslant n - 3.$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 5,\ u_n \geqslant n - 3.}$$

c. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-3) = +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

3. **a.** On a déjà $v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -2 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$. Soit alors n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n - \frac{15}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} \\ &= \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est la suite géométrique de premier terme } v_0 = -\frac{25}{2} \text{ et de raison } q = \frac{1}{3}.}$$

b. Soit n un entier naturel. D'après la question a), $v_n = v_0 q^n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ puis

$$u_n = -\frac{1}{2}\left(v_n - 3n + \frac{21}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3n + \frac{21}{2}\right) = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.}$$

c. Soit n un entier naturel.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left(\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{3}{2}\times 0 - \frac{21}{4}\right) + \left(\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \frac{3}{2}\times 1 - \frac{21}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\times n - \frac{21}{4}\right) \\
&= \frac{25}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + \frac{3}{2}(0+1+\ldots+n) - \frac{21}{4}(n+1) \\
&= \frac{25}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) = \frac{25}{4}\times\frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{21}{4}n - \frac{21}{4} \\
&= \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{2}n + \frac{33}{8} - \frac{75}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{2}n + \frac{33}{8} - \frac{25}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ S_n = \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{2}n + \frac{33}{8} - \frac{25}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n.}$$

