

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Liban

EXERCICE 1

Partie A :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$. En particulier, $e^x \neq 0$ et on peut donc écrire $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $(e^x)^n = e^{nx}$.

- Pour $n = 0$, $(e^x)^0 = 1$ et $e^{0x} = e^0 = 1$. Donc $(e^x)^0 = e^{0x}$ et l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $(e^x)^n = e^{nx}$. Alors

$$(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}.$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout réel } x \text{ et pour tout entier naturel } n, (e^x)^n = e^{nx}.$$

Partie B

1. a) Pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ est continue sur $[0, 1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0, 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Donc, pour tout entier naturel n , u_n existe.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 1 dx = (1-0) \times 1 = 1. \end{aligned}$$

$$u_0 + u_1 = 1.$$

b)

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 -\frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} dx = [-\ln(1+e^{-x})]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^0) \\ &= \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) = \ln 2 - \ln\left(\frac{e+1}{e}\right) = \ln 2 - (\ln(e+1) - \ln e) = 1 + \ln 2 - \ln(e+1). \end{aligned}$$

Ensuite, $u_0 = 1 - u_1 = 1 - (1 + \ln 2 - \ln(e+1)) = \ln(e+1) - \ln 2$.

$$u_0 = \ln(1+e) - \ln 2 \text{ et } u_1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1}).$$

Remarque. $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = [\ln(e^x+1)]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2.$

2. Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \geq 0$. On a montré que

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n \geq 0.$$

3. a) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x} + 1)}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{n}e^{-n} \right) - \left(-\frac{1}{n}e^0 \right) = \frac{1-e^{-n}}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n, u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

b) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question 2, $u_{n+1} \geq 0$ et donc $u_{n+1} + u_n \geq u_n$. D'après la question précédente, on a alors $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n, u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

4. Pour tout entier naturel non nul, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-e^{-n}) = 1$. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

EXERCICE 2

1. La droite (D) est la droite passant par A de coordonnées (1, -2, 1) et de vecteur directeur \overrightarrow{AB} de coordonnées (3-1, -5+2, -2+1) ou encore (2, -3, -1). On en déduit immédiatement qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. La droite (D) est dirigée par le vecteur $\vec{u}(2, -3, -1)$ et la droite (D') est dirigée par le vecteur $\vec{u}'(-1, 2, 1)$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires (car s'il existe un réel k tel que $\vec{u}' = k\vec{u}$, on a $k = -1$ en analysant la troisième coordonnée mais aussi $k = -\frac{1}{2}$ en analysant la première coordonnée ce qui est impossible). Donc les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites (D) et (D') sont sécantes ou non coplanaires. On en déduit encore que les droites (D) et (D') sont non coplanaires si et seulement si les droites (D) et (D') n'ont aucun point commun. Etudions donc l'intersection des droites (D) et (D'). Soient t et k deux réels.

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - k \\ -2 - 3t = 1 + 2k \\ -1 - t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 - t \\ 1 + 2t = 2 - (-1 - t) \\ -2 - 3t = 1 + 2(-1 - t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 - t \\ t = 2 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites (D) et (D') n'ont pas de point commun.

Les droites (D) et (D') sont non coplanaires.

3. a) La droite (D) est l'ensemble des points de coordonnées (1 + 2t, -2 - 3t, -1 - t) avec t ∈ ℝ. Or, pour tout réel t,

$$4(1 + 2t) + (-2 - 3t) + 5(-1 - t) + 3 = 8t - 3t - 5t + 4 - 2 - 5 + 3 = 0.$$

Donc tout point de la droite (D) appartient au plan (P) ou encore

le plan (P) contient la droite (D).

b) Soit M(2 - k, 1 + 2k, k), k ∈ ℝ, un point de (D').

$$M \in (P) \Leftrightarrow 4(2 - k) + (1 + 2k) + 5k + 3 = 0 \Leftrightarrow 3k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = -4.$$

Pour k = -4, on obtient le point de (D') de coordonnées (6, -7, -4). Ainsi, le plan (P) et la droite (D') ont un point commun et un seul, le point C(6, -7, -4).

Le plan (P) et la droite (D') se coupent en C(6, -7, -4).

4. a) La droite (D') est dirigée par le vecteur $\vec{u}'(-1, 2, 1)$.

Or, $\vec{u}' \cdot \vec{w} = (-1) \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ et donc les droites (Δ) et (D') sont orthogonales. De plus, les droites (Δ) et (D') ont en commun le point C et finalement les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

Les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

b) La droite (D) est dirigée par le vecteur $\vec{u}(2, -3, -1)$.

Or, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$ et donc les droites (Δ) et (D) sont orthogonales. Etudions alors l'intersection

des droites (D) et (Δ). (Δ) est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 6 + t' \\ y = -7 + t' \\ z = -4 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$

$$\begin{cases} 1 + 2t = 6 + t' \\ -2 - 3t = -7 + t' \\ -1 - t = -4 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -3 + t \\ 1 + 2t = 6 + (-3 + t) \\ -2 - 3t = -7 + (-3 + t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -3 + t \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = -1 \end{cases}.$$

Puisque le système précédent a une solution, les droites (Δ) et (D) ont un point commun et sont donc perpendiculaires. De plus, pour t' = -1, on obtient le point commun à savoir le point E de coordonnées (5, -8, -3)

Les droites (Δ) et (D) sont perpendiculaires en E(5, -8, -3).

EXERCICE 3

1. FAUX
2. VRAI
3. VRAI
4. VRAI
5. FAUX

Explications.

1. Notons X le nombre de boules blanches obtenues au bout de dix tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes (puisque les tirages se font avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule est blanche » avec une probabilité $p = \frac{1}{3}$ ou « la boule est noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{2}{3}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$ et on a

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 120 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7.$$

Donc la proposition 1 est fausse.

2. Soit a un réel positif. $p(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$. On a aussi $p(X > a) = 1 - p(X \leq a) = e^{-\lambda a}$. Par suite,

$$p(X \leq a) = p(X > a) \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} \Leftrightarrow e^{-\lambda a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda a = -\ln 2 \Leftrightarrow a = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Donc la proposition 2 est vraie.

3. $z = 2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Donc un argument de z est $-\frac{\pi}{3}$. Mais alors pour tout entier naturel n , un argument de z^n est $-n\frac{\pi}{3}$. Si de plus, n est un multiple de 3, on peut poser $n = 3p$ où p est un entier naturel. Un argument de z^n est alors $-n\frac{\pi}{3} = -p\pi$. Or, un nombre complexe d'argument $-p\pi$, $p \in \mathbb{N}$, est un nombre réel et donc si n est un multiple de 3, z^n est un nombre réel. La proposition 3 est vraie.

4. L'affixe du vecteur \overrightarrow{BA} est $a - b = \left(1 - \frac{1+i}{2}\right)a = \frac{1-i}{2}a$. Puisque un nombre complexe et son conjugué ont même module, on a alors

$$AB = |b - a| = \left|\frac{1-i}{2}\right| |a| = \left|\frac{1+i}{2}\right| |a| = |b| = OB.$$

Donc le triangle OAB est isocèle en B. De plus, $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $AB = OB = \frac{OA}{\sqrt{2}}$. Mais alors

$$OB^2 + AB^2 = \frac{OA^2}{2} + \frac{OA^2}{2} = OA^2.$$

Donc le triangle OAB est rectangle et isocèle en B. La proposition 4 est vraie.

5. Soit z un nombre complexe non nul.

On a $z' = -\frac{10}{z} = -\frac{10z}{zz} = -\frac{10}{|z|^2}z$ et donc, puisque $-\frac{10}{|z|^2}$ est un réel, $\overrightarrow{OM'} = -\frac{10}{|z|^2}\overrightarrow{OM}$. Ainsi, les vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et donc les points O, M et M' sont alignés. La proposition 5 est fausse.

EXERCICE 4

Partie A

1. • La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$. La fonction u est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 2) = -2$. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} u(x) = -\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2) = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.

2. a) La fonction u est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc pour tout réel k de $] -\infty, +\infty[$, l'équation $u(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$. En particulier, l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0, +\infty[$.

b) La machine donne $u(1,31) = -0,01\dots < 0$ et $u(1,32) = 0,02\dots > 0$. Donc, $u(1,31) < u(\alpha) < u(1,32)$ et puisque la fonction u est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$$1,31 < \alpha < 1,32.$$

3. Pour $x \in]0, \alpha[$, on a $u(x) < u(\alpha) = 0$ et pour $x \in]\alpha, +\infty[$, on a $u(x) > u(\alpha) = 0$. Donc,

la fonction u est strictement négative sur $]0, \alpha[$, strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$ et s'annule en α .

4. L'égalité $u(\alpha) = 0$ s'écrit $\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$ ou encore $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) \times (2 - \ln x) = 2x - \frac{2(2 - \ln x)}{x} = \frac{2x^2 - 2(2 - \ln x)}{x} = \frac{2(x^2 - 2 + \ln x)}{x} \\ &= \frac{2u(x)}{x}. \end{aligned}$$

2. Pour tout réel $x > 0$, $\frac{2}{x} > 0$. Donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. D'après la question 3 de la partie A, la fonction f' est strictement négative sur $]0, \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$. On en déduit que

la fonction f est strictement décroissante sur $]0, \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$.

Partie C

1. Soit $x > 0$.

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2} = \sqrt{f(x)}.$$

2. a) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geq x^2 > 0$. Donc la fonction f est strictement positive sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis que pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Mais pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} > 0$ et donc, pour tout réel $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $f'(x)$. Par suite, les fonction f et g ont les mêmes variations sur $]0, +\infty[$.

b) D'après la question 2 de la partie B, la fonction f admet un minimum sur $]0, +\infty[$ atteint en α . Puisque les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0, +\infty[$, la distance AM est minimale quand l'abscisse de M est égale à α et donc quand le point M est le point P de coordonnées $(\alpha, \ln \alpha)$.

c) D'après la question 4 de la partie A, on a $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$ et donc

$$AP = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\alpha^2)^2} = \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2} \quad (\alpha > 0 \text{ et donc } \sqrt{\alpha^2} = \alpha).$$

$$AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}.$$

3. Le coefficient directeur de la droite (AP) est $a = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha}$. D'autre part, le coefficient directeur de la tangente à Γ en P est $a' = \ln'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$. Maintenant

$$a \times a' = \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha^2} = \frac{-\alpha^2}{\alpha^2} = -1,$$

et donc

la droite (AP) est perpendiculaire à la tangente à Γ en P.