BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Centres étrangers

EXERCICE 1

Question 1. **VRAI**

Question 2. **VRAI**

Question 3. **FAUX**

Question 4. **VRAI**

Question 1 Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $(2, -3, 1)$ et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_2$ est le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ de coordonnées $(-2, -1, 1)$. De plus,

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 2 \times (-2) + (-3) \times (-1) + 1 \times 1 = -4 + 3 + 1 = 0.$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux, les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales. La proposition 1 est donc vraie.

Question 2 Un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ à savoir le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(4, 2, -2)$. Une équation du plan $(\mathscr{P})$ est donc $4(x-2)+2(y+1)-2(z-3) = 0$ ou encore $2(x-2)+(y+1)-(z-3) = 0$ ou enfin $2x + y - z = 0$. Donc la proposition 2 est vraie.

Question 3 Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,0003t}.$$

La probabilité demandée est $p(X > 2000)$. Or

$$p(X > 2000) = 1 - p(X \leqslant 2000) = 1 - (1 - e^{-0,0003 \times 2000}) = e^{-0,6} = 0,54\ldots.$$

Donc la proposition 3 est fausse.

Question 4 On a $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$. D'une part, $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$. D'autre part, d'après la formule des probabilités totales

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = \frac{7}{25} + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B) = \frac{7}{25} + (1 - 0,1)(1 - 0,4) = 0,28 + 0,54 = 0,82.$$

Donc, $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,28}{0,82} = \dfrac{28}{82} = \dfrac{14}{41}$. La proposition 4 est vraie.

EXERCICE 2

1. Soient z un nombre complexe distinct de -1 puis M le point d'affixe z.

$$M' = M \Leftrightarrow \frac{iz}{z+1} = z \Leftrightarrow z^2 + z = iz \Leftrightarrow z^2 + (1-i)z = 0 \Leftrightarrow z(z+1-i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = -1+i.$$

$$\boxed{\text{Les points } M \text{ tels que } M' = M \text{ sont les points d'affixes } 0 \text{ et } -1+i.}$$

2. Soit M un point distinct de A et de O. Soit z l'affixe du point M. On a donc $z \neq 0$ et $z \neq a$ puis

$$OM' = |z'| = \left|\frac{iz}{z+1}\right| = \frac{|i| \times |z|}{|z-a|} = \frac{1 \times OM}{AM} = \frac{OM}{AM},$$

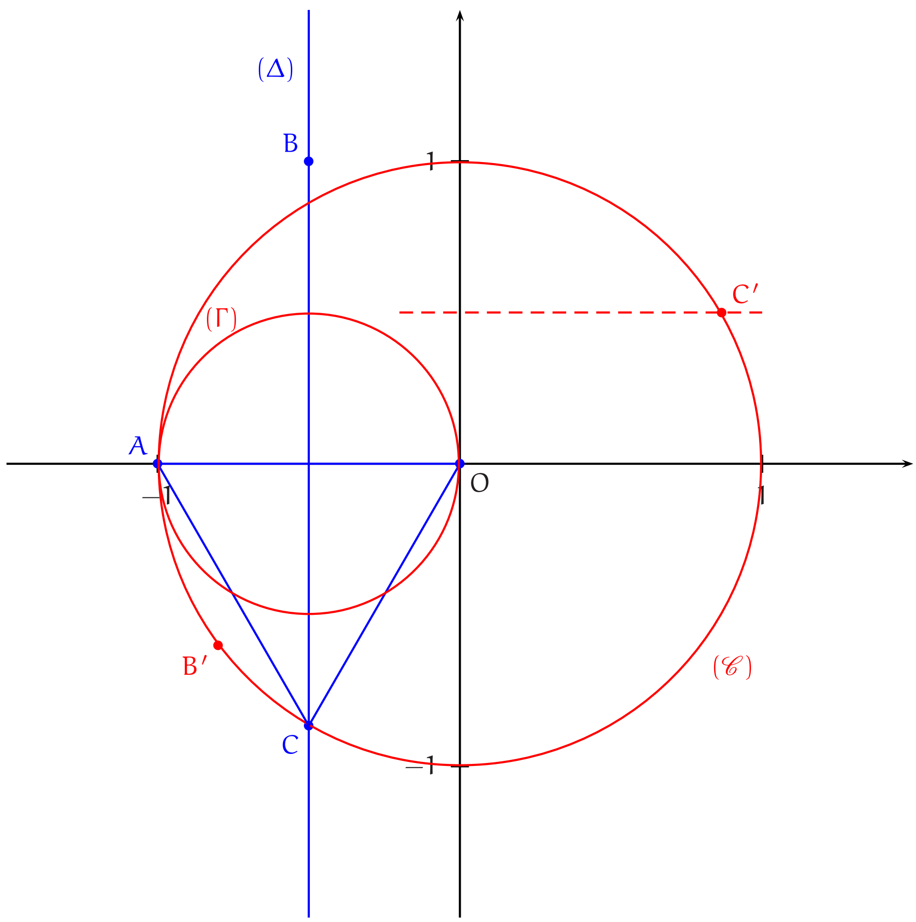
puis

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \arg(z') = \arg\left(\frac{z}{z+1} \times i\right) = \arg\left(\frac{z-0}{z-a}\right) + \arg(i) = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi],$$

ou encore $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A \text{ et de } O,\ OM' = \frac{OM}{AM} \text{ et } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi].}$$

3. a)



b) $b' = \dfrac{i\left(-\frac{1}{2}+i\right)}{-\frac{1}{2}+i+1} = \dfrac{-1-\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}+i} = \dfrac{-2-i}{1+2i} = \dfrac{(-2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{-4+3i}{1^2+2^2} = \dfrac{-4+3i}{5}$.

$$\boxed{b' = \frac{-4+3i}{5}.}$$

$OB' = |b'| = \dfrac{1}{5}|-4+3i| = \dfrac{1}{5}\sqrt{(-4)^2+3^2} = \dfrac{\sqrt{25}}{5} = 1.$

c) Soit M un point de la médiatrice du segment $[OA]$. Alors, $OM' = \dfrac{OM}{AM} = 1$ et donc M' appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

d) Le point C est à égale distance des points O et A. Donc le point C appartient à la droite (Δ) puis, d'après la question précédente, le point C' appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
D'autre part, d'après la question 2, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OC'}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}\right) + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$. On en déduit que le point C' est le point du cercle $(\mathscr{C})$ d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$ et d'abscisse strictement positive. Voir figure.

4. a) Soit M un point distinct de O et de A.

$$\begin{aligned}z' &= \frac{iz}{z+1} = \frac{i(x+iy)}{x+iy+1} = \frac{-y+ix}{(x+1)+iy} = \frac{(-y+ix)((x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)}\\ &= \frac{-y(x+1)+xy+i(x(x+1)+y^2)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{-y+i(x^2+y^2+x)}{(x+1)^2+y^2}.\end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(z') = \dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$. Par suite,

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \text{ et } \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } (x, y) \neq (-1, 0) \text{ et } x^2+y^2+x = 0.$$

Maintenant, $x^2+y^2+x = 0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$. (Γ) est donc le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ privé des points O et A ou encore le cercle de diamètre $[OA]$ privé des points O et A.

$$\boxed{(\Gamma) \text{ est le cercle de diamètre } [OA] \text{ privé des points } O \text{ et } A.}$$

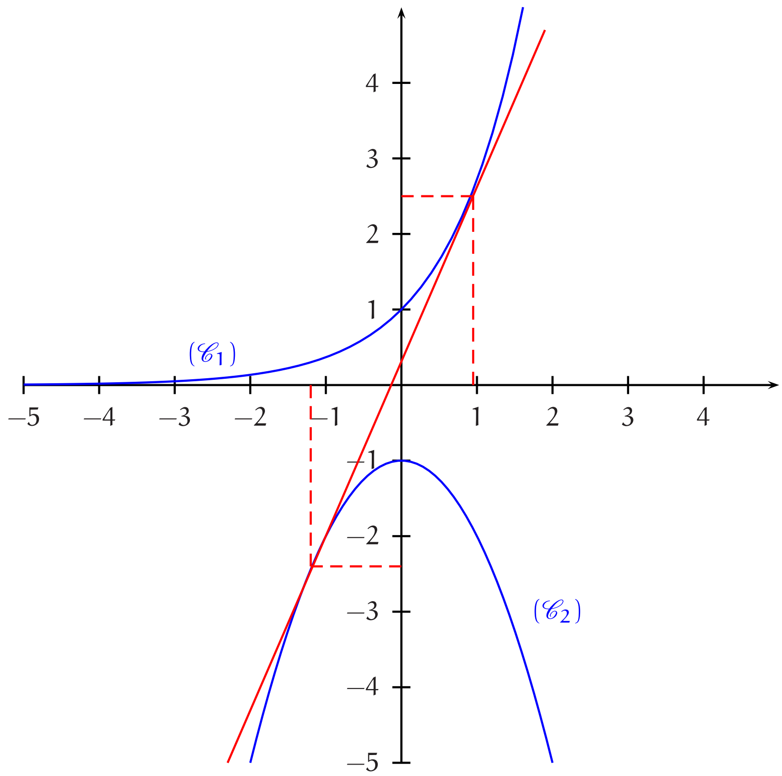
b) Soit M un point du plan. D'après la question 2,

$$\begin{aligned}M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [\pi]\\ &\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } OAM \text{ rectangle en } M\\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [OA] \text{ privé de } O \text{ et de } A.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.

EXERCICE 3

1.



L'abscisse du point de contact de cette tangente avec $(\mathscr{C}_1)$ vaut environ $-1,2$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec $(\mathscr{C}_2)$ vaut environ $0,9$.

2. a) On note g la fonction $x \mapsto e^x$ et h la fonction $x \mapsto -x^2 - 1$.
Une équation de la tangente $(\mathscr{T}_A)$ est $y = g'(a)(x-a) + g(a)$ ou encore $y = e^a(x-a) + e^a$ ou enfin $y = e^a x + e^a - ae^a$.

b) Une équation de la tangente $(\mathscr{T}_B)$ est $y = h'(b)(x-b) + h(b)$ ou encore $y = (-2b)(x-b) - b^2 - 1$ ou enfin $y = -2bx + b^2 - 1$.

c) Les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues si et seulement si elles ont le même coefficient directeur et la même ordonnée à l'origine. Ces dernières conditions sont équivalentes au système $\left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{array}\right.$.

d)

$$\left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = \left(-\dfrac{e^a}{2}\right)^2 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ 4e^a - 4ae^a = e^{2a} - 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{array}\right..$$

3. a) Soit x un réel de $]-\infty, 0[$. Alors $2x < 0$ puis $e^{2x} < 1$ puis $e^{2x} - 4 < -3$ et en particulier $e^{2x} - 4 < 0$. D'autre part, puisque $x - 1 < 0$ et $4e^x > 0$, on a $4e^x(x-1) < 0$.

b) Mais alors $f(x) = (e^{2x} - 4) + 4e^x(x-1) < 0$. En particulier, pour tout réel x de $]-\infty, 0[$, $f(x) \neq 0$ et donc

$$\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ n'a pas de solution dans l'intervalle }]-\infty, 0[.}$$

c) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x.$$

Par suite, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant e^{2x}$ et en particulier $f'(x) > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

d) $f(0) = e^0 + 0 - 4e^0 - 4 = -7$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x} - 4) = +\infty$. Mais on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} 4e^x(x-1) = +\infty$ et finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Maintenant, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et on sait que pour tout réel k de $[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [-7, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, comme 0 appartient à $[-7, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

La machine fournit $f(0,84) = -0,1\ldots < 0$ et $f(0,85) = 0,07\ldots > 0$ Par suite, $f(0,84) < f(a) < f(0,85)$ et puisque f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on a montré que

$$\boxed{0,84 < a < 0,85.}$$

4. $0,84 < a < 0,85 \Rightarrow e^{0,84} < e^a < e^{0,85} \Rightarrow -\dfrac{e^{0,85}}{2} < -\dfrac{e^a}{2} < -\dfrac{e^{0,84}}{2}$. Donc

$$-\frac{e^{0,85}}{2} < b < -\frac{e^{0,84}}{2}.$$

Maintenant, la machine fournit $-\dfrac{e^{0,85}}{2} = 1,16\ldots$ et $\dfrac{e^{0,84}}{2} = 1,15\ldots$ On en déduit que

$$\boxed{-1,2 < b < -1,1.}$$

EXERCICE 4

1. Etude des propriétés de la fonction f

a) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 0 - 5 \times \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{5}{(x+1)^2}.$$

La dérivée de f est strictement positive sur $[0,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b) Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow 6 - \frac{5}{x+1} = x \Leftrightarrow x - 6 + \frac{5}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-6)(x+1)+5}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 5x - 1$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) = 29$. L'équation $x^2 - 5x - 1 = 0$ admet donc deux racines réelles à savoir $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ et $\beta = \dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$. β est strictement négatif (car $\sqrt{29} > \sqrt{25} = 5$) et α est strictement positif. Donc

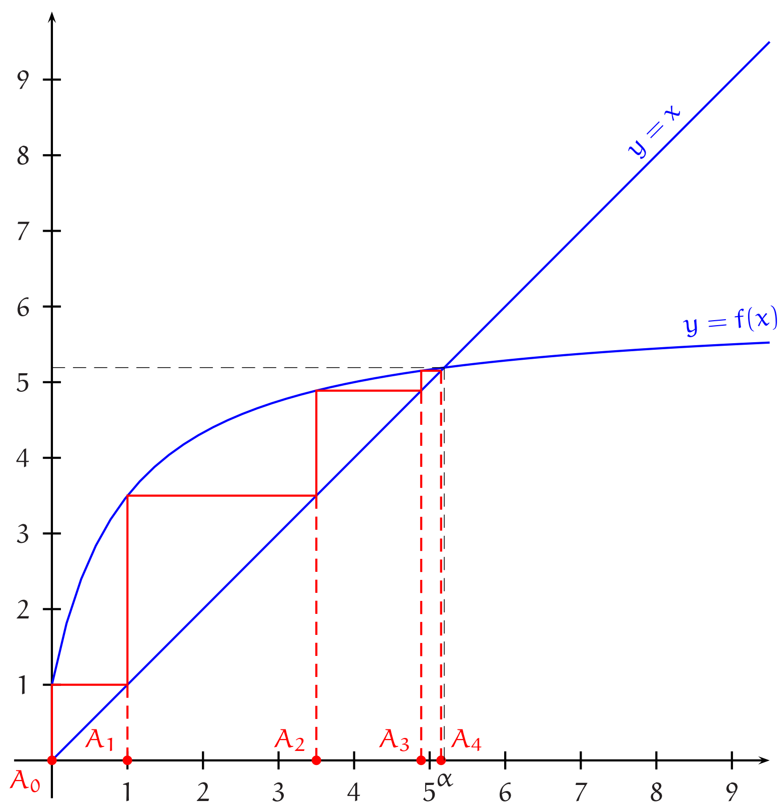
$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution dans } [0,+\infty[\text{, le nombre } \alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}.}$$

c) Soit $x \in [0,\alpha]$. Puisque $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ et que f est croissante sur $[0,+\infty[$, on a $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$ ou encore $1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$ et en particulier $0 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$.
De même, si $x \geqslant \alpha$, alors $f(x) \geqslant f(\alpha) = \alpha$.

$$\boxed{\text{Si } x \in [0,\alpha]\text{, alors } f(x) \in [0,\alpha] \text{ et si } x \in [\alpha,+\infty[\text{, alors } f(x) \in [\alpha,+\infty[.}$$

2. Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

a)



Il semble que la suite (u_n) soit croissante, convergente de limite α.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

• Puisque $u_0 = 0$, $u_1 = f(u_0) = 1$ et $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} = 5,1\ldots$, ces inégalités sont vraies quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. Puisque f est croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ ou encore $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ et en particulier $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.}$$

c) Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par α. On en déduit que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite. ℓ est un réel positif et

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(6 - \frac{5}{u_n + 1}\right) = 6 - \frac{5}{\ell + 1} = f(\ell).$$

Maintenant, α est l'unique solution dans $[0, +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$ et donc $\ell = \alpha$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante et converge vers } \alpha.}$$

3. Etude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

1er cas. Supposons $0 \leqslant u_0 < \alpha$. Vérifiions tout d'abord que $u_1 > u_0$.

$$u_1 - u_0 = 6 - \frac{5}{u_0 + 1} - u_0 = \frac{(6 - u_0)(u_0 + 1) - 5}{u_0 + 1} = \frac{-u_0^2 + 5u_0 + 1}{u_0 + 1} = \frac{-(u_0 - \alpha)(u_0 - \beta)}{u_0 + 1} > 0 \text{ car } \beta < u_0 < \alpha.$$

Ainsi, $u_1 > u_0$. Mais alors, toute la démarche de la question précédente reste valable et de la même manière, on peut montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} < \alpha$. Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et est majorée par α. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique solution positive de l'équation $f(x) = x$ c'est-à-dire converge vers α.

$$\boxed{\text{Si } 0 \leqslant u_0 < \alpha, \text{ la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et converge vers } \alpha.}$$

2ème cas. Supposons $u_0 > \alpha$. Alors $u_1 - u_0 = \dfrac{-(u_0 - \alpha)(u_0 - \beta)}{u_0 + 1} < 0$. Donc $u_1 < u_0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$, en adaptant la démarche de la question précédente, on peut montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\alpha < u_{n+1} < u_n$. Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et est minorée par α et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique solution positive de l'équation $f(x) = x$ c'est-à-dire converge vers α.

$$\boxed{\text{Si } u_0 > \alpha, \text{ la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et converge vers } \alpha.}$$

3ème cas. Supposons $u_0 = \alpha$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \alpha$.
• C'est vrai pour $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = \alpha$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(\alpha) = \alpha$.
Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Si } u_0 = \alpha, \text{ la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante et en particulier converge vers } \alpha.}$$

