Session 2010

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

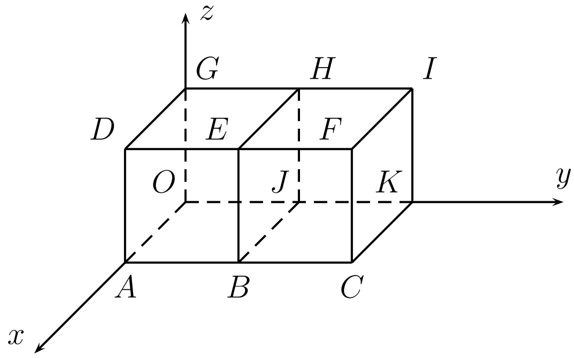
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

*Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions, numérotées de 1 à 8. À chaque question, une seule des trois réponses notée **a**, **b** ou **c** est exacte. On demande au candidat d'indiquer sur sa copie, pour chaque question, quelle est la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponses n'enlèvent pas de point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points : $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,2,0)$, $D(1,0,1)$, $E(1,1,1)$, $F(1,2,1)$, $G(0,0,1)$, $H(0,1,1)$, $I(0,2,1)$, $J(0,1,0)$, $K(0,2,0)$ comme indiqués sur le figure ci-contre :



Question 1. Le triangle GBI est :

Réponse **a :** isocèle. Réponse **b :** équilatéral. Réponse **c :** rectangle.

Question 2. Le barycentre du système de points pondérés $\{(O,2),(A,-1),(C,1)\}$ est :

Réponse **a :** le point K. Réponse **b :** le point I. Réponse **c :** le point J.

Question 3. Le produit scalaire $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{FC}$ est égal à :

Réponse **a :** 1. Réponse **b :** -1. Réponse **c :** 2.

Question 4. Les points B, C, I, H :

Réponse **a :** sont non coplanaires. Réponse **b :** forment un rectangle. Réponse **c :** forment un carré.

Question 5. Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (KE) est :

Réponse **a :** $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{array}\right.$. Réponse **b :** $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + 4t \\ y = t \\ z = 4t \end{array}\right.$. Réponse **c :** $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{array}\right.$.

Question 6. Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

Réponse **a :** $2x + 2y - z - 2 = 0$. Réponse **b :** $x + y - 3 = 0$. Réponse **c :** $x + y + 2z = 2$.

Question 7. La distance du point C au plan (ADH) est :

Réponse **a :** $\sqrt{2}$. Réponse **b :** 2. Réponse **c :** $\dfrac{1}{2}$.

Question 8. Le volume du tétraèdre $HJKB$ est égal à :

Réponse **a :** $\dfrac{1}{2}$. Réponse **b :** $\dfrac{1}{6}$. Réponse **c :** $\dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 2 (5 points)

(Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a = -2, \qquad b = 2 - 2i\sqrt{3}, \qquad c = 3 + 3i\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad p = 10.$$

PARTIE A. Etude de la configuration

1. Construction de la figure.

a) Placer les points A et P dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Déterminer les modules des nombres complexes b et c.

c) Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C.

2. Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.

3. On note r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que l'image Q du point C par r_A a pour affixe : $q = -4 + 4i\sqrt{3}$.

b) Vérifier l'égalité $q = -2b$. Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?

4. Soit R le symétrique de C par rapport à O.

a) Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.

b) Etablir que : $AP = BQ = CR$.

PARTIE B

On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le réel $f(M)$ défini par :

$$f(M) = MA + MB + MC.$$

1. Calculer $f(O)$.

2. Soient M un point quelconque et N son image par la rotation r_A.
Démontrer que : $MA = MN$ puis que $MC = NQ$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point M du plan, $f(M) \geqslant 12$.

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'événement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'événement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire $p_1 = 1$.

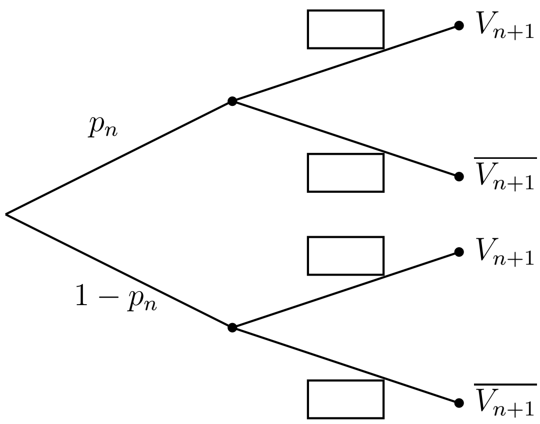
1. Calculer les probabilités des événements suivants :

a) A : « les 2-ième et 3-ième sondages sont positifs » ;

b) B : « les 2-ième et 3-ième sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3-ième sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = p_n - 0,2$.

a) Démontrer que u est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.

b) Exprimer p_n en fonction de n.

c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

EXERCICE 4 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Etude des limites

a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.

b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Etude des variations de la fonction f

a) Démontrer que la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Partie B Etude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\,dx.$$

1. Calculer I_2.

2. Une relation de récurrence

a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$

b) Calculer I_3.

3. Etude de la limite de la suite de terme général I_n

a) Etablir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{e}{x^n}.$$

b) En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).