BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Asie

EXERCICE 1

Question 1.	**Réponse a)**
Question 2.	**Réponse c)**
Question 3.	**Réponse b)**
Question 4.	**Réponse b)**
Question 5.	**Réponse c)**
Question 6.	**Réponse c)**
Question 7.	**Réponse a)**
Question 8.	**Réponse b)**

1. $GB = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ et $BI = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Donc le triangle GBI est isocèle en B. La bonne réponse est la réponse a). On note que $GI = 2$ de sorte que le triangle GBI n'est pas équilatéral. On note aussi que $GB^2 + BI^2 = 6 \neq BI^2$ et donc le triangle GBI n'est pas rectangle en B.

2. Notons M le barycentre du système $\{(O, 2), (A, -1), (C, 1)\}$. Alors $2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ et donc

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ}.$$

Ainsi, $M = J$ et la bonne réponse est la réponse c).

3. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{FC} = (0 - 1)(1 - 1) + (1 - 0)(2 - 2) + (1 - 0)(0 - 1) = -1$. La bonne réponse est la réponse b).

4. $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ de même que le vecteur $\overrightarrow{HI}$. Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{HI}$ sont égaux et donc le quadrilatère $BCIH$ est un parallélogramme. La réponse a) est fausse.
Ensuite, $HI = 1$ et $BH = \sqrt{2}$. Donc le quadrilatère $BCIH$ n'est pas un carré et la réponse c) est fausse. On en déduit que la réponse d) est vraie ce qui est effectivement le cas car $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$.

5. La droite (KE) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{KE}$ de coordonnées $(1, -1, 1)$. Donc seule la représentation paramétrique de la réponse c) est possible. Plus précisément si $t = 0$, on obtient le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ c'est-à-dire le point E et si $t = 1$, on obtient le point de coordonnées $(0, 2, 0)$ c'est-à-dire le point K. La bonne réponse est donc la réponse c).

6. Les coordonnées du point G ne vérifient ni l'équation de la réponse a) ni l'équation de la réponse b). Donc la bonne réponse est la réponse c).
On note que les coordonnées des points B, G et K vérifient effectivement l'équation $x + y + 2z = 2$ ce qui confirme le résultat.

7. Déterminons une équation cartésienne du plan (ADH). On la cherche sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont trois réels non tous nuls.

• $ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$. Le plan (ADH) admet donc des équations de la forme $ax + by + cz - a = 0$.
• $ax_D + by_D + cz_D - a = 0 \Rightarrow a + c - a = 0 \Rightarrow c = 0$. Le plan (ADH) admet donc des équations de la forme $ax + by - a = 0$.
• $ax_H + by_H - a = 0 \Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow a = b$. Le plan (ADH) admet donc des équations de la forme $a(x + y - 1) = 0$.

En choisissant par exemple $a = 1$, on obtient une équation cartésienne du plan (ADH) à savoir $x + y - 1 = 0$. Par suite,

$$d\,(C, (ADH)) = \frac{|x_C + y_C - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

La bonne réponse est la réponse a).

8. L'aire du triangle JKB est la moitié de l'aire du carré $BCKJ$ et est donc égale à $\frac{1}{2}$. Puisque la droite (JH) est perpendiculaire au plan (BJK), le volume du tétraèdre $HJBK$ est

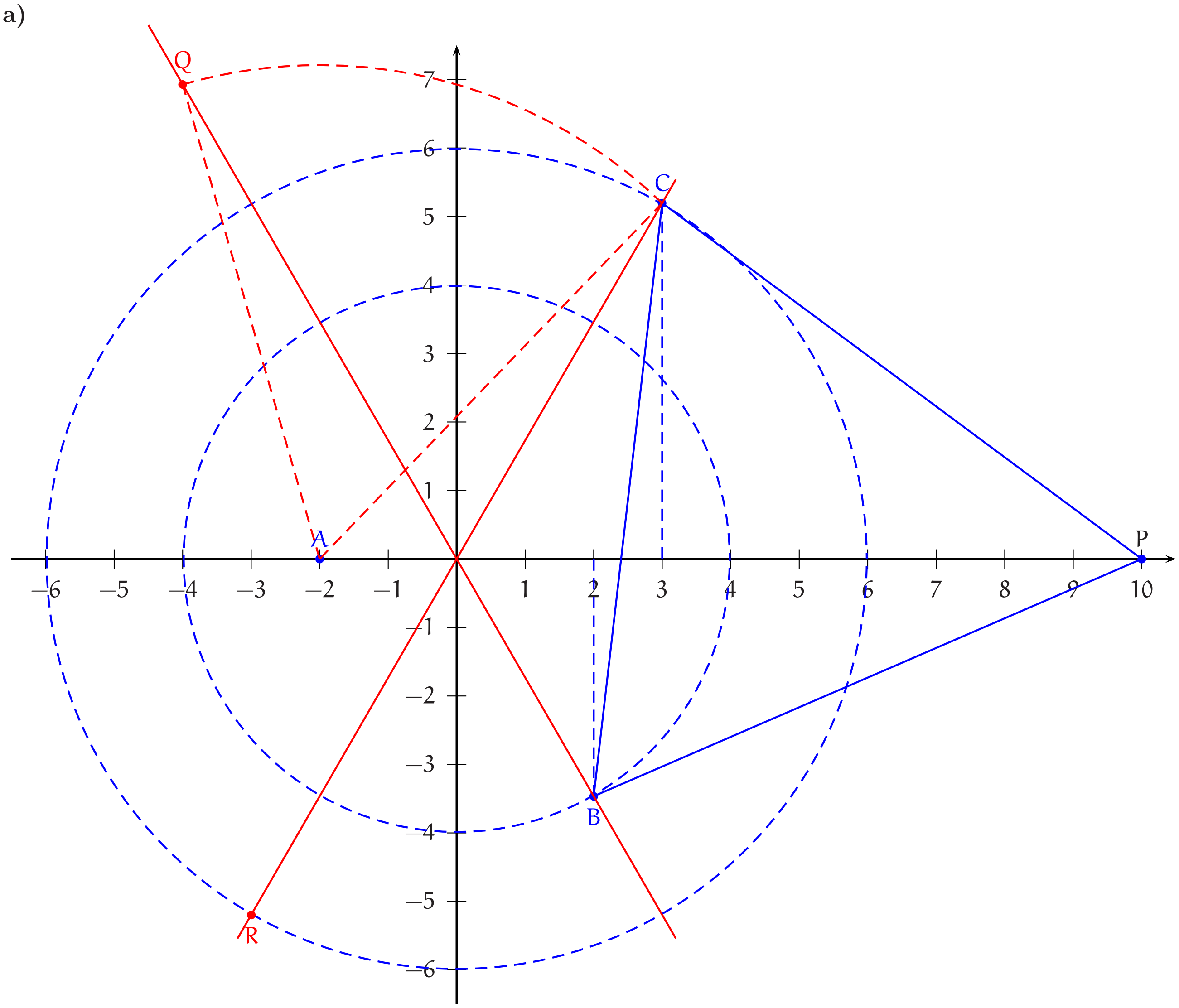
$$\frac{1}{3} \times \text{aire de } (BJK) \times HJ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

La bonne réponse est la réponse b).

EXERCICE 2

PARTIE A. Etude de la configuration

1. a)



b) $|b| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$ et $|c| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$.

$$\boxed{OB = |b| = 4 \text{ et } OC = |c| = 6.}$$

c) Voir figure.

2. • $BC = |c - b| = |1 + 5i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+75} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

• $BP = |p - b| = |8 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{8^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{64+12} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

• $CP = |p - c| = |7 - 3i\sqrt{3}| = \sqrt{7^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{49+27} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

Donc $BC = BP = CP$ et

$$\boxed{\text{Le triangle } BCP \text{ est équilatéral.}}$$

3. a) L'expression complexe de la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est

$$z' = a + e^{i\pi/3}(z - a) = -2 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z+2) = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 1 + i\sqrt{3}.$$

Par suite,

$$q = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(3+3i\sqrt{3}) - 1 + i\sqrt{3} = \frac{-6+6i\sqrt{3}}{2} - 1 + i\sqrt{3} = -4+4i\sqrt{3}$$

$$\boxed{q = -4+4i\sqrt{3}.}$$

b) On a encore $q = -2(2-2i\sqrt{3}) = -2b$. On en déduit d'abord que $\overrightarrow{OQ} = -2\overrightarrow{OB}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les points } O, B \text{ et } Q \text{ sont alignés.}}$$

4. a) • Les points A et P sont sur l'axe des abscisses de même que le point O. Donc le point O appartient à la droite (AP).
• D'après la question précédente, le point O appartient à la droite (BQ).
• Puisque R est le symétrique de C par rapport à O, le point O est le milieu du segment $[CR]$ et en particulier le point O appartient à la droite (CR).

On a montré que

$$\boxed{\text{Les droites } (AP), (BQ) \text{ et } (CR) \text{ sont concourantes en } O.}$$

b) $AP = |p-a| = 12$, $BQ = |q-b| = |(-4+4i\sqrt{3}) - (2-2i\sqrt{3})| = |-6+6i\sqrt{3}| = 6\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 12$ et $CR = 2OC = 2|c| = 12$.

$$\boxed{AP = BQ = CR = 12.}$$

PARTIE B

1. D'après la question 1.b) de la partie A, $f(O) = OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 2+4+6 = 12$.

$$\boxed{f(O) = 12.}$$

2. Soient M un point du plan puis $N = r_A(M)$. En notant m et n les affixes respectives des points M et N, on a

1ère solution. $n = a + e^{i\pi/3}(m-a)$ et donc

$$\begin{aligned} MN = |n-m| &= \left|a + e^{i\pi/3}(m-a) - m\right| = \left|e^{i\pi/3}(m-a) - (m-a)\right| = \left|\left(e^{i\pi/3}-1\right)(m-a)\right| \\ &= \left|e^{i\pi/3}-1\right| \times |m-a| = \left|e^{i\pi/3}-1\right| \times AM, \end{aligned}$$

avec $\left|e^{i\pi/3}-1\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$. Donc

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ du plan, } MA = MN.}$$

2ème solution. Puisque $r_A(M) = N$, on a $AM = AN$ et donc le triangle MAN est isocèle en A. Mais on a aussi $\widehat{MAN} = \frac{\pi}{3}$ et donc le triangle MAN est équilatéral (car $\widehat{MNA} = \widehat{NMA} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$). En particulier, on a $MA = MN$.

D'autre part, puisque la rotation r_A est une isométrie, on a $NQ = r_A(M)r_A(C) = MC$. Donc

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ du plan, } MC = NQ.}$$

3. Soit M un point du plan. D'après la question précédente et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}f(M) &= MA + MB + MC = MN + MB + NQ = BM + MN + NQ\\ &\geqslant BQ = |q - b| = |-2b - b| \text{ (d'après la question A.3.b))}\\ &= |-3b| = 3|b| = 3 \times 4 \text{ (d'après la question A.1.c))}\\ &= 12.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ du plan, } f(M) \geqslant 12.}$$

EXERCICE 3

1. a) L'événement A est l'événement $V_2 \cap V_3$. Puisque $p_1 = 1$, on a $p(V_2) = 0,6$ et $p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - p(V_2) = 0,4$. Ensuite,

$$p\left(V_2 \cap V_3\right) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36.$$

b) De même,

$$p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 = 0,36.$$

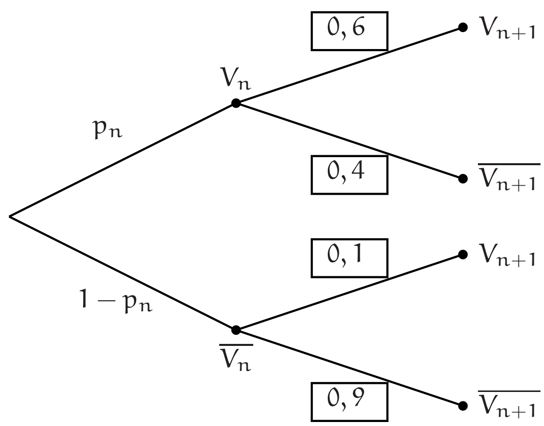
$$\boxed{p(A) = 0,36 \text{ et } p(B) = 0,36.}$$

2. On a aussi $p\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = p\left(\overline{V_2}\right) \times \left(1 - p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3})\right) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,04$. Mais alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_3 = p\left(V_2 \cap V_3\right) + p\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = 0,36 + 0,04 = 0,4.$$

$$\boxed{p_3 = 0,4.}$$

3.



4. Soit n un entier naturel non nul. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(V_{n+1}) = p\left(V_n \cap V_{n+1}\right) + p\left(\overline{V_n} \cap V_{n+1}\right) = p(V_n) \times p_{V_n}(V_{n+1}) + p\left(\overline{V_n}\right) \times p_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) \\ &= 0,6p_n + 0,1(1 - p_n) = 0,6p_n + 0,1 - 0,1p_n = 0,5p_n + 0,1. \end{aligned}$$

5. a) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,2) = 0,5u_n.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times (0,5)^{n-1}$ puis que $p_n = u_n + 0,2 = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}.}$$

c) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,2.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1. Etude des limites

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty.}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et finalement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

c) On en déduit que les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire les deux axes de coordonnées, sont asymptotes à la courbe représentative de f.

2. Etude des variations de la fonction f

a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).}$$

b) Pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x^4} > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 0$ et $2x + 1 > 0$. Donc, pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) < 0$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

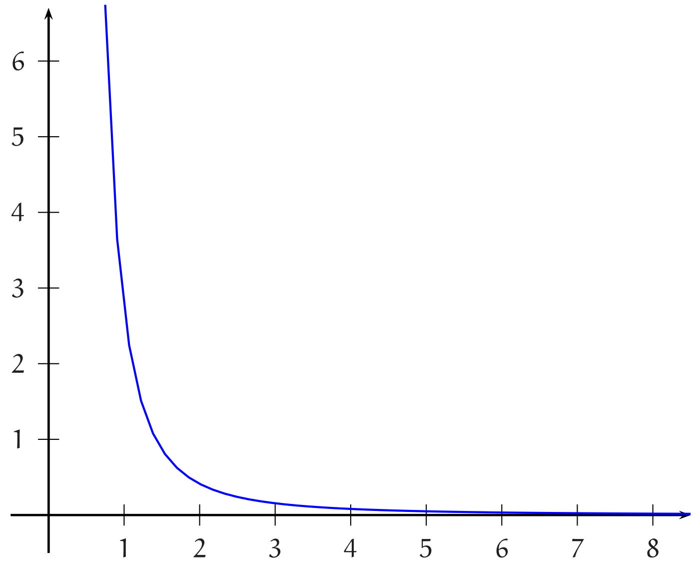
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
f	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0

c) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. On en déduit que pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\right[=]0,+\infty[$, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans $]0,+\infty[$. En particulier, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α dans $]0,+\infty[$.

La machine donne $f(1,105) = 2,02\ldots > 2$ et $f(1,11) = 1,99\ldots$ Donc $f(1,105) > f(\alpha) > f(1,11)$. Comme f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $1,105 < \alpha < 1,11$ et donc que

$$\boxed{\alpha = 1,11 \text{ arrondi au centième.}}$$

3.


1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6
7
8

Partie B

1. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $[1, 2]$ et donc I_2 existe. De plus,

$$I_2 = \int_1^2 -\left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}}\ dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e^1 = e - \sqrt{e}.$$

$$\boxed{I_2 = e - \sqrt{e}.}$$

2. Une relation de récurrence

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1ère solution. Pour x dans $[1, 2]$, posons $u(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, 2]$ et pour x dans $[0, 2]$ on a

$$u(x) = e^{\frac{1}{x}} \qquad v(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$$
$$u'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \qquad v'(x) = \frac{1}{x^n}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, 2]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\ dx = \frac{1}{1-n}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}} - e^1\right) + \frac{1}{1-n}\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}\ dx \\
&= \frac{1}{1-n}\left(\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - e + I_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $(1-n)I_n = \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - e + I_{n+1}$ puis que $I_{n+1} = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.}$$

2ème solution (une intégration par parties un peu plus astucieuse). $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^2 \left(-\frac{1}{x^{n-1}}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\ dx$. On pose donc $u(x) = -\dfrac{1}{x^{n-1}}$, $u'(x) = \dfrac{n-1}{x^n}$, $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ et $v(x) = e^{\frac{1}{x}}$. On obtient

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_1^2 u(x)v'(x)\ dx = \left[-\frac{1}{x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{n-1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\ dx \\
&= -\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + e - (n-1)I_n = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.
\end{aligned}$$

b) En particulier, $I_3 = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2^1} + (1-2)I_2 = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2} - (e - \sqrt{e}) = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

$$\boxed{I_3 = \frac{\sqrt{e}}{2}.}$$

3. Etude de la limite de la suite de terme général I_n

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit x un réel de $[1, 2]$. On a $e^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^n} \geqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$. D'autre part, $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$ et, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{\frac{1}{x}} \leqslant e^1 = e$. En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par le réel positif $\dfrac{1}{x^n}$, on obtient $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{e}{x^n}$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 2 \text{ et tout réel } x \text{ de } [1,2],\ 0 \leqslant \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{e}{x^n}.}$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel x de $[1,2]$, $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$ et donc par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.

D'autre part, pour tout réel x de $[1,2]$, $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{e}{x^n}$ et donc par croissance de l'intégrale,

$$I_n \leqslant \int_1^2 \frac{e}{x^n}\,dx = e\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^2 = \frac{e}{n-1}\left(-\frac{1}{2^{n-1}}+1\right) \leqslant \frac{e}{n-1}.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n-1}.}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n-1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

