Session 2010

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Pour chacune des questions suivantes, ***une ou deux des réponses*** *proposées sont correctes.*
Un point est attribué à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point.
Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue.
Si le total des points obtenus est négatif, la note attribuée à l'exercice est 0.

Recopier le numéro de la question et la ou les réponses correctes (deux au maximum).

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A : $\dfrac{5}{8}$ **B :** $\dfrac{21}{32}$ **C :** $\dfrac{11}{32}$ **D :** $\dfrac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A : $\dfrac{105}{248}$ **B :** $\dfrac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ **C :** $\dfrac{21^2}{32^2}$ **D :** $\dfrac{5^2}{8^2}$

3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

A : $\dfrac{1}{3}$ **B :** $\dfrac{1}{5}$ **C :** $\dfrac{1}{12}$ **D :** $\dfrac{1}{4}$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.
La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

A : $0,35$ à 10^{-2} près **B :** $0,85^9$ **C :** $0,85^9 \times 0,15$ **D :** $0,85^9 \times 0,15 \times 10$

EXERCICE 2 (5 points)

(Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{array} \right.$$

a) Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
Traduire les relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

b) En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω.

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2i$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$.

a) Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b) Faire une figure et placer les points A et B.

c) Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $c = -8i$ et D son image par la rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Placer les points C et D.
Montrer que l'affixe du point D est $d = 4\sqrt{3} + 4i$.

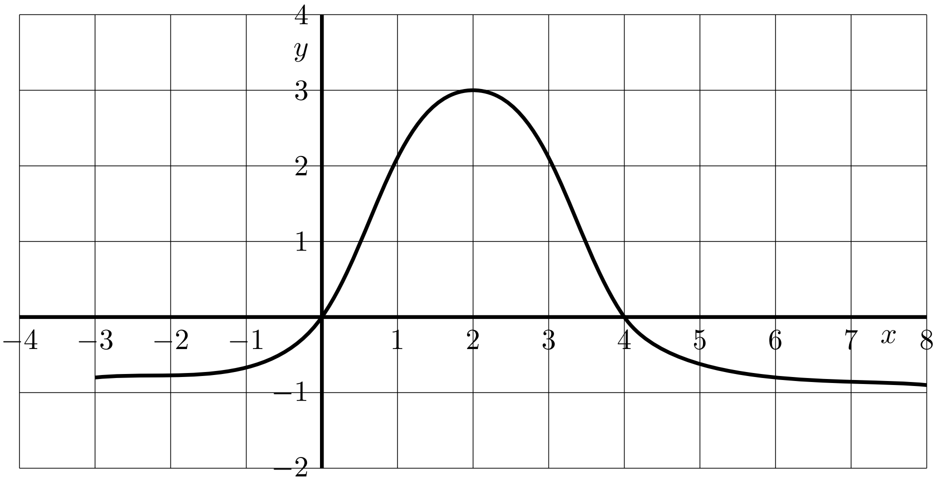
5. Montrer que D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.

6. Montrer que OAD est un triangle rectangle.

EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [-3\ ;\ 8]$.



On définit la fonction F sur I par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

1. **a)** Que vaut $F(0)$?

b) Donner le signe de $F(x)$:
- pour $x \in [0\ ;\ 4]$;
- pour $x \in [-3\ ;\ 0]$.

Justifier les réponses.

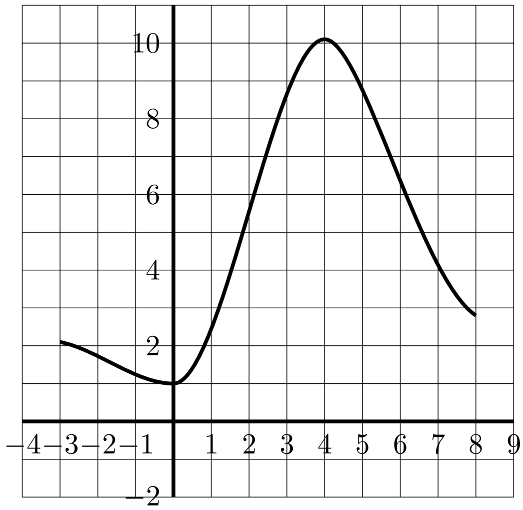
c) Faire figurer sur le graphique donné en **ANNEXE** les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$.

2. **a)** Que représente f pour F ?

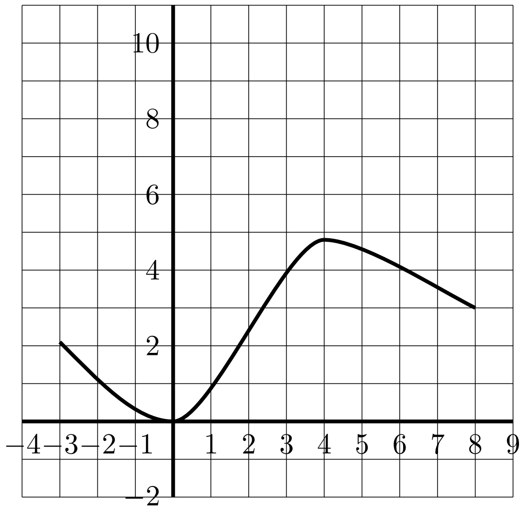
b) Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I. Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f.

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I.

Courbe A



Courbe B



L'une des courbes peut-elle représenter la fonction F ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = x - x\ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et que $g'(x) = -\ln x$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :

a) le sens de variation de la suite (u_n) ;

b) la limite éventuelle de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.

a) Montrer que $v_n = n - n\ln n$.

b) En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3
Commun à tous les candidats