

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Antilles Guyane

EXERCICE 1

- 1) B
- 2) A et B
- 3) C
- 4) A et D

1. Il y a 11 cartes qui sont un as ou un pique car $\text{card}(A \cup P) = \text{card}(A) + \text{card}(P) - \text{card}(A \cap P) = 4 + 8 - 1 = 11$. Il y a donc $32 - 11 = 21$ cartes qui ne sont ni un as, ni un pique. la probabilité demandée est $\frac{21}{32}$ et la réponse B est correcte. D'autre part, les autres propositions sont $\frac{20}{32}$, $\frac{11}{32}$ et $\frac{12}{32}$. Donc, les autres propositions sont fausses.

2. Le nombre de tirages simultanés de 2 cartes parmi 32 est $\binom{32}{2} = \frac{32 \times 31}{2} = 16 \times 31 = 496$.

Le nombre de tirages simultanés de 2 cartes parmi 21 cartes qui ne sont ni un as, ni un pique est $\binom{21}{2} = \frac{21 \times 20}{2} = 21 \times 10 = 210$. La probabilité demandée est

$$\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{210}{496} = \frac{105}{248}.$$

Les réponses A et B sont correctes et donc les réponses C et D sont fausses.

3. La probabilité que la durée d'attente appartienne à l'intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$ est $b - a$. Donc la probabilité que l'attente soit comprise entre $15 \text{ mn} = \frac{1}{4} \text{ h}$ et $20 \text{ mn} = \frac{1}{3} \text{ h}$ est $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. La réponse C est correcte et les autres ne le sont pas.

4. Si X désigne le nombre d'appareils en panne au bout de la période de garantie, X est régi par une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,15$. La probabilité demandée est

$$p(X = 1) = \binom{10}{1} \times 0,15^1 \times 0,85^9 = 0,85^9 \times 0,15 \times 10.$$

Donc la réponse D est correcte et les réponses B et C ne le sont pas. D'autre part, $0,85^9 \times 0,15 \times 10 = 0,347\dots = 0,35$ à 10^{-2} près. Donc la réponse A est correcte.

EXERCICE 2

1. Restitution organisée de connaissances

a) Soit M un point du plan distinct de Ω . L'égalité (1) montre que M' est distinct de Ω puis que $\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$.
D'autre part, l'égalité fournit $\arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi]$.

b) Soit M un point du plan distinct de Ω . La question précédente montre que $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ . Par suite, $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$ ou encore $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ou enfin $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$. Cette dernière égalité reste vraie quand $z = \omega$ car dans ce cas $z' = z = \omega$. Finalement

$$\text{pour tout nombre complexe } z, z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

2. On note (E) l'équation proposée. Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 16 = 3 \times 16 - 4 \times 16 = -16 = (4i)^2.$$

L'équation (E) admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \frac{4\sqrt{3} - 4i}{2} = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3} + 2i$.

$$\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0 \text{ sont } z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3} + 2i.$$

3. a) $|a| = |2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$ puis

$$a = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

puis $b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$a = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

b) Voir figure à la fin de l'exercice.

c) On a déjà $OA = |a| = 4$ et $OB = |b| = 4$. Ensuite, $AB = |b - a| = |4i| = 4$. Donc $OA = OB = AB$ et

$$\text{le triangle } OAB \text{ est équilatéral.}$$

4. L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)z$. Donc

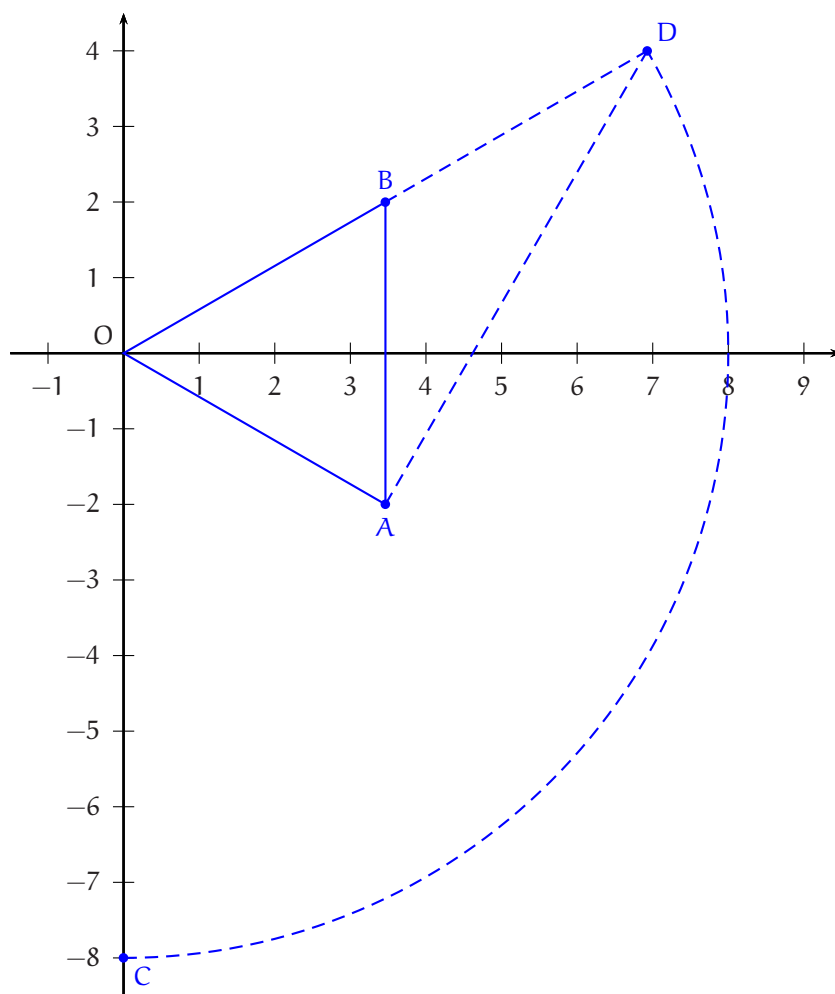
$$z_D = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-8i) = 4i + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 4i.$$

5. En particulier, $z_D = 2z_B$ et donc

$$D \text{ est l'image de } B \text{ par l'homothétie de centre } O \text{ et de rapport } 2.$$

6. $BD = \frac{1}{2}OD = OB$ et donc $BD = BO = BA$. Par suite, le point A est sur le cercle de diamètre $[OD]$ (et B est le centre de ce cercle). On sait alors que

le triangle OAD est rectangle en A .



EXERCICE 3

1. a) $F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0.$

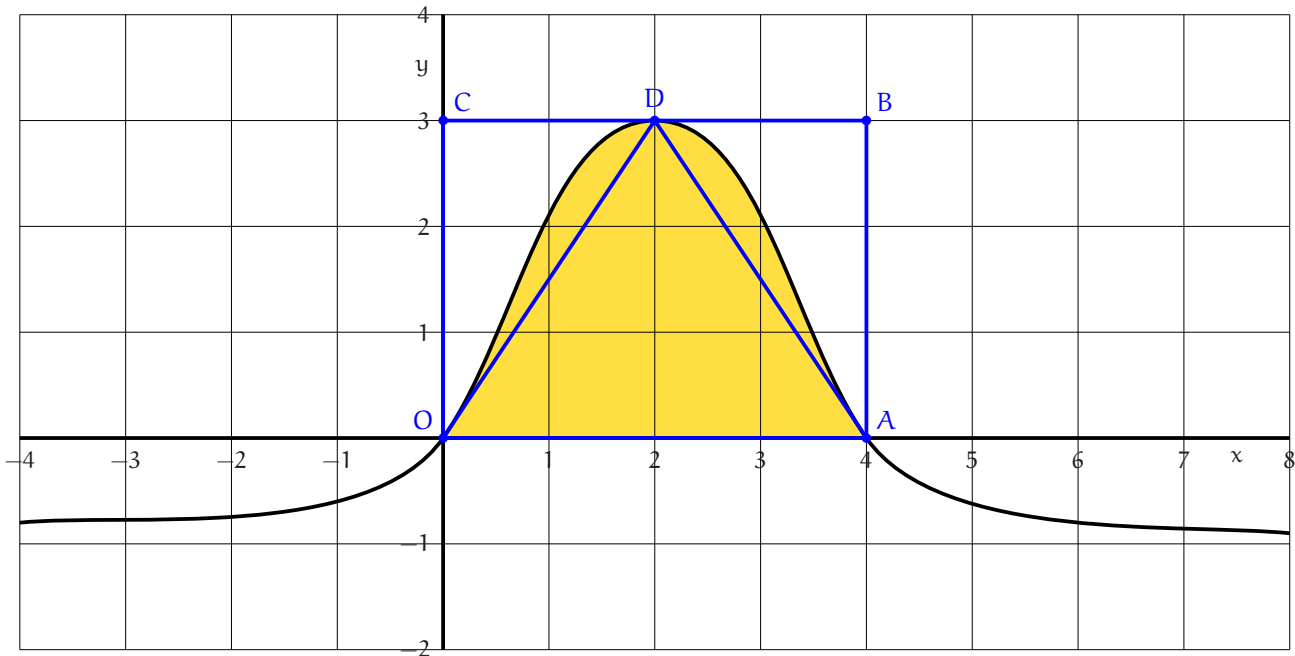
b) • Soit $x \in]0, 4]$. Le graphique montre que la fonction f est positive sur $[0, 4]$. En particulier, pour tout réel $t \in [0, x]$, $f(t) \geq 0$. Par positivité de l'intégrale on en déduit que $F(x) = \int_0^x f(t) dt \geq 0$. Ceci reste vrai pour $x = 0$ car $F(0) = 0$.

• Soit $x \in [-3, 0]$. Le graphique montre que la fonction f est négative sur $[-3, 0]$. En particulier, pour tout réel $t \in [x, 0]$, $f(t) \leq 0$. On en déduit que $\int_x^0 f(t) dt \leq 0$ puis que $F(x) = \int_0^x f(t) dt = -\int_x^0 f(t) dt \geq 0$.

En résumé,

pour tout réel x de $[-3, 4]$, $F(x) \geq 0$.

c) La fonction f est positive sur l'intervalle $[0, 4]$. Donc $F(4)$ est l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 4$.



$F(4)$ est plus petit que l'aire du rectangle $OABC$ qui est égale à $4 \times 3 = 12$ et $F(4)$ est plus petit que l'aire du triangle OAD qui est égale à $\frac{4 \times 3}{2} = 6$. Donc

$$6 \leq F(4) \leq 12.$$

2. a) La fonction f est continue sur l'intervalle $[-3, 8]$. On sait alors que la fonction F est la primitive de la fonction f qui s'annule en 0. En particulier, F est dérivable sur $[-3, 8]$ et $F' = f$.

f est la dérivée de F .

b) La fonction $f = F'$ est strictement négative sur $[-3, 0[$, strictement positive sur $]0, 4[$ et négative sur $]4, 8]$. Donc la fonction F est strictement décroissante sur $[-3, 0]$, strictement croissante sur $[0, 4]$ et strictement décroissante sur $[4, 8]$.

3. Les deux courbes représentées sont les graphes de fonctions décroissantes sur $[-3, 0]$, croissantes sur $[0, 4]$ et décroissantes sur $[4, 8]$. La fonction représentée par la courbe A ne s'annule pas en 0 contrairement à F (d'après la question 1.a)). La courbe A ne peut donc représenter la fonction F . D'après la question 1.c), on a $6 \leq F(4) \leq 12$. La fonction représentée par la courbe B prend en 4 une valeur inférieure à 5. Donc, la courbe B ne peut représenter la fonction F . Finalement

aucune des deux courbes ne peut représenter la fonction F .

EXERCICE 4

Partie A

1. • $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0$.

• Pour tout réel $x > 0$, $g(x) = x(1 - \ln x)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
--

2. La fonction $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus, pour $x > 0$,

$$g'(x) = 1 - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} \right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x.$$

Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = -\ln x$.

3. Par suite, pour $x \in]0, 1[$, $g'(x) > 0$ et pour $x \in]1, +\infty[$, $g'(x) < 0$ et donc la fonction g est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g			

Partie B

1. Donnons les premières valeurs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

n	u_n
1	2,718...
2	1,847...
3	0,743...
4	0,213...
5	0,047...
6	0,008...

a) Il semble que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit décroissante.

b) Il semble que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n = \ln \left(\frac{e^n}{n^n} \right) = \ln(e^n) - \ln(n^n) = n \ln(e) - n \ln(n) = n - n \ln(n).$$

b) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = g(n)$. On a vu à la question 3 de la partie A que la fonction g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Si n est un entier supérieur ou égal à 1, on a $1 \leq n < n + 1$ et donc $g(n) > g(n + 1)$ ou encore $v_n > v_{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul, on a $v_n > v_{n+1}$ et donc

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} , on a

$$u_n = e^{v_n} > e^{v_{n+1}} = u_{n+1}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul, on a $u_n > u_{n+1}$ et donc

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive. Donc, pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq u_n \leq u_1 = e$. Donc

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

4. Pour tout entier naturel non nul n , $u_n = e^{g(n)}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.