BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1) a) Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x^2} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Le trinôme du second degré $x(2-x) = -x^2+2x$ admet les deux racines 0 et 2 et, puisque le coefficient de x^2 est strictement négatif, on sait que $x(2-x) < 0$ si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et $x(2-x) > 0$ si $x \in]0, 2[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

c) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$. Donc pour tout réel x non nul, $f(x) > 0$. D'autre part, $f(0) = 0$. Le signe de f sur $\mathbb{R}$ est donné par le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

2) a) Soit a un réel. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Donc si $a \geqslant 0$, $I(a) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. Si $a \leqslant 0$, toujours par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^0 f(x)\,dx \geqslant 0$. Maintenant, $I(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(x)\,dx$ et donc $I(a) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a,\ I(a) \geqslant 0 \text{ si } a \geqslant 0 \text{ et } I(a) \leqslant 0 \text{ si } a \leqslant 0.}$$

b) Soit a un réel. Notons K le segment $[0, a]$ si $a \geqslant 0$ ou $[a, 0]$ si $a \leqslant 0$. Pour x dans K, posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur K et pour x dans K on a

$$u(x) = x^2 \qquad v(x) = -e^{-x}$$
$$u'(x) = 2x \qquad v'(x) = e^{-x}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur K. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}I(a) &= \int_0^a x^2e^{-x}\,dx = \left[x^2(-e^{-x})\right]_0^a - \int_0^a (2x)(-e^{-x})\,dx = -a^2e^{-a} + 0 + 2\int_0^a xe^{-x}\,dx\\ &= -a^2e^{-a} + 2\int_0^a xe^{-x}\,dx.\end{aligned}$$

Effectuons une nouvelle intégration par parties.

$$\begin{aligned}I(a) &= -a^2e^{-a} + 2\int_0^a xe^{-x}\,dx = -a^2e^{-a} + 2\left(\left[x(-e^{-x})\right]_0^a - \int_0^a (-e^{-x})\,dx\right)\\ &= -a^2e^{-a} + 2\left(-ae^{-a} + 0 + \int_0^a e^{-x}\,dx\right) = -a^2e^{-a} - 2ae^{-a} + 2\left(\left[-e^{-x}\right]_0^a\right)\\ &= -a^2e^{-a} - 2ae^{-a} + 2(-e^{-a} + e^0) = 2 - 2e^{-a} - 2ae^{-a} - a^2e^{-a} = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a,\ I(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).}$$

c) En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\frac{1}{2}e^{a}$, on obtient

$$\frac{1}{2}e^{a}I(a) = \frac{1}{2}e^{a} \times 2 - \frac{1}{2}e^{a} \times 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right) = e^{a} - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a,\ \frac{1}{2}e^{a}I(a) = e^{a} - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).}$$

3) a) D'une part, $g(0) = h(0) = 1$ et d'autre part, $g'(0) = e^0 = 1$ et $h'(0) = 1 + 0 = 1$. Donc les tangentes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ en leur point d'abscisse 0 passent par le point de coordonnées $(0, 1)$ et ont même coefficient directeur. On en déduit que

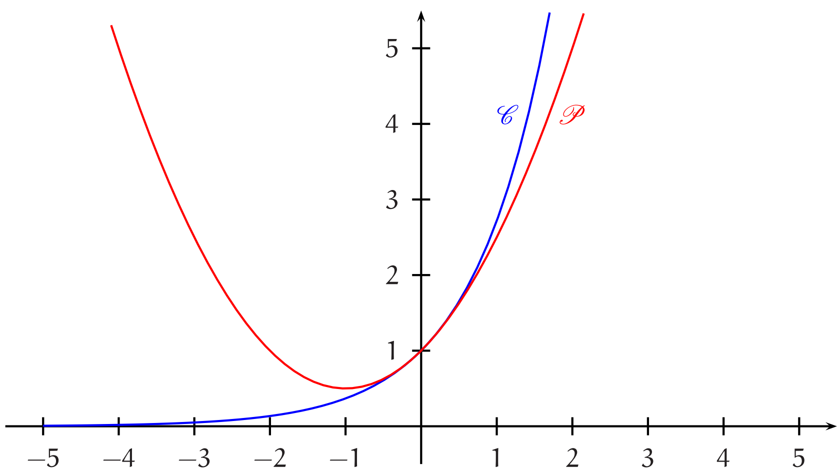
$$\boxed{\text{les courbes } \mathscr{C} \text{ et } \ \text{ ont la même tangente au point d'abscisse } 0.}$$

b) D'après la question 2)c), pour tout réel x,

$$g(x) - h(x) = e^{x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{x}I(x).$$

Mais pour tout réel x, $\frac{1}{2}e^{x} > 0$. Donc pour tout réel x, $g(x) - h(x)$ est du signe de $I(x)$, signe qui a été étudié à la question 2)a). On en déduit que

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } \mathscr{P} \text{ sur } [0, +\infty[\text{ et au-dessous sur }]-\infty, 0].}$$



EXERCICE 2

1) a) $3 \times (-2) + 7 \times 1 = 1$ et donc le couple $(-2, 1)$ est un couple d'entiers relatifs tel que $3u + 7v = 1$. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par 10^{2n}, on obtient $3 \times (-2 \times 10^{2n}) + 7 \times 10^{2n} = 10^{2n}$ et donc

$$\boxed{\text{le couple } (x_0, y_0) = \left(-2 \times 10^{2n}, 10^{2n}\right) \text{ est une solution particulière de l'équation } (E).}$$

b) Soient x et y deux entiers relatifs.

$$3x + 7y = 10^{2n} \Rightarrow 3x + 7y = 3x_0 + 7y_0 \Rightarrow 3(x - x_0) = 7(y_0 - y).$$

Ainsi, si le couple (x, y) est solution de l'équation (E), nécessairement l'entier 7 divise l'entier $3(x - x_0)$. Puisque les entiers 3 et 7 sont premiers entre eux (3 et 7 étant deux nombres premiers distincts), le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 7 divise l'entier $x - x_0$ et donc il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 7k$ ou encore tel que $x = x_0 + 7k$. De même, l'entier 3 divise l'entier $y_0 - y$ et il existe un entier l tel que $y_0 - y = 3l$ ou encore tel que $y = y_0 - 3l$.

Réciproquement, soient k et l deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 7k$ et $y = y_0 - 3l$.

$$3x + 7y = 3(x_0 + 7k) + 7(y_0 - 3l) = 3x_0 + 7y_0 + 3 \times 7 \times (k - l) = 10^{2n} + 3 \times 7 \times (k - l),$$

et donc, le couple (x, y) est solution de l'équation (E) si et seulement si $k = l$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation } (E) \text{ sont les couples de la forme} \\ \left(-2 \times 10^{2n} + 7k, 10^{2n} - 3k\right),\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}}$$

2) a) $100 - 2 = 98 = 7 \times 14$. Donc $100 - 2$ est divisible par 7 ou encore $100 \equiv 2$ (modulo 7).

Soient alors x et y deux entiers relatifs tels que $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$. D'une part, $3x^2 + 7y^2 \equiv 3x^2$ (modulo 7). D'autre part, puisque $10^{2n} = (10^2)^n = (100)^n$, on en déduit que $10^{2n} \equiv 2^n$ (modulo 7). Finalement, si le couple (x, y) est solution de l'équation (G), alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

b)

Reste de la division euclidienne de x par 7.	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7	0	3	5	6	6	5	3

c) Tout d'abord, $2^1 = 2$ est congru à 2 modulo 7, $2^2 = 4$ est congru à 4 modulo 7 et $2^3 = 8$ est congru à 1 modulo 7. Maintenant, l'entier n est soit un multiple de 3, soit 1 de plus qu'un multiple de 3, soit 2 de plus qu'un multiple de 3.

• Si n est un multiple de 3, il existe un entier naturel non nul p tel que $n = 3p$. Dans ce cas, $2^n = 2^{3p} = (2^3)^p$ et d'après la remarque initiale, $2^n \equiv 1^p$ (modulo 7) ou encore $2^n \equiv 1$ modulo 7).

• Si n est 1 de plus qu'un multiple de 3, il existe un entier naturel p tel que $n = 3p + 1$. Dans ce cas, $2^n = 2^{3p+1} = 2^{3p} \times 2$ puis $2^n \equiv 1 \times 2$ (modulo 7) ou encore $2^n \equiv 2$ (modulo 7).

• Si n est 2 de plus qu'un multiple de 3, il existe un entier naturel p tel que $n = 3p + 2$. Dans ce cas, $2^n = 2^{3p+2} = 2^{3p} \times 4$ puis $2^n \equiv 1 \times 4$ (modulo 7) ou encore $2^n \equiv 4$ (modulo 7).

Ainsi, 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7. D'autre part, modulo 7, l'entier x est congru à 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 et d'après la question précédente, l'entier $3x^2$ est congru à 0, 3, 5 ou 6 modulo 7. Ainsi, les entiers $3x^2$ et 2^n se sont jamais congrus modulo 7. L'équation $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7) n'a donc pas de solution. D'après la question a), on en déduit que l'équation $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ n'a pas de solution.

$$\boxed{\text{L'équation } (G) \text{ n'admet pas de solution.}}$$

EXERCICE 3

1) Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. Ensuite, puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AD}$, le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$.
Puisque $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et Puisque $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$.

Le point I milieu de [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2}\right)$ ou encore $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$. De même, le point J milieu de [BF] a pour coordonnées $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ et le point K milieu de [HF] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\boxed{I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right),\ J\left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \text{ et } K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).}$$

2) Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $(x_K - x_I, y_K - y_I, z_K - z_I)$ ou encore $\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$. De même, le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IK} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ} = 2 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK). Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal au plan (IJK).

Le plan (IJK) est le plan passant par $I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, 1, 1)$. Une équation cartésienne du plan (IJK) est donc $2 \times (x - 1) + 1 \times \left(y - \frac{1}{2}\right) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $2x + y + z - \frac{5}{2} = 0$ ou enfin

$$\boxed{\text{une équation du plan (IJK) est } 4x + 2y + 2z - 5 = 0.}$$

3) a) La droite (CD) est la droite passant par le point $D(0, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC}(1, 0, 0)$. Donc

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est } \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.}$$

b) Soit $M(t, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CD).

$$M \in (IJK) \Leftrightarrow 4t + 2 + 0 - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}.$$

Quand $t = \frac{3}{4}$, on obtient le point $R\left(\frac{3}{4}, 1, 0\right)$.

$$\boxed{\text{Le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point } R\left(\frac{3}{4}, 1, 0\right).}$$

c) Voir figure page suivante.

4) Les plans (ABD) et (EFH) sont parallèles. Le plan (IKR) est sécant au plan (ABD) selon la droite (IR). On sait alors que le plan (IKR) coupe le plan (EFH) en une droite parallèle à la droite (IR).
Puisque le point K est commun aux plans (EFH) et (IKR), l'intersection de ces deux plans est la parallèle à la droite (IR) passant par K. Cette droite coupe les arêtes (EF) et (GH) en deux points M et N. La section du cube par le plan (IJK) est le polygone IRNMJ.

Voir figure page suivante.

5) a) Le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et le plan (IJK) a pour équation $4x + 2y + 2z - 5 = 0$. Donc

$$d(G, (IJK)) = \frac{|4 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 - 5|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2 \times 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\boxed{d(G, (IJK)) = \frac{\sqrt{6}}{4}.}$$

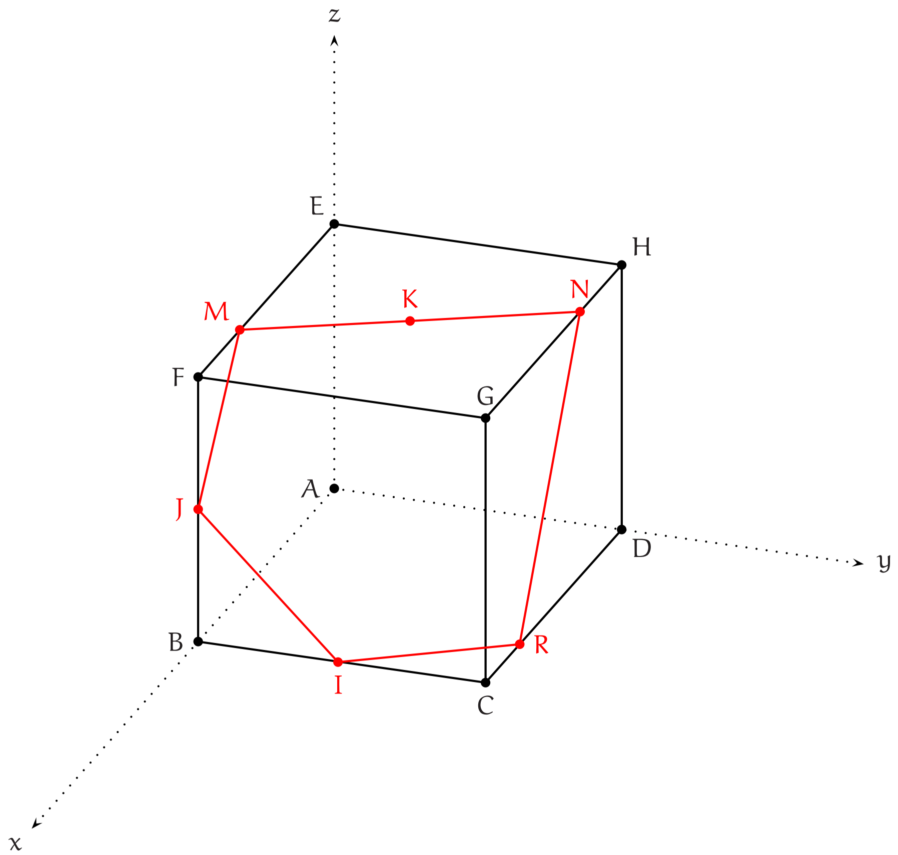
b) Le rayon ρ de la sphère $\mathscr{S}$ est

$$\rho = \mathrm{GF} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2} = 1.$$

D'après la question a), la distance d du centre G de $\mathscr{S}$ au plan (IJK) est $d = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Par suite, $d < \rho$ et on sait alors que la sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont sécants en un cercle. De plus, si on note r le rayon de ce cercle, le théorème de PYTHAGORE permet d'affirmer que $\rho^2 = r^2 + d^2$ et donc que

$$r = \sqrt{\rho^2 - d^2} = \sqrt{1 - \frac{6}{16}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Le rayon du cercle intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan (IJK) est $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.



EXERCICE 4

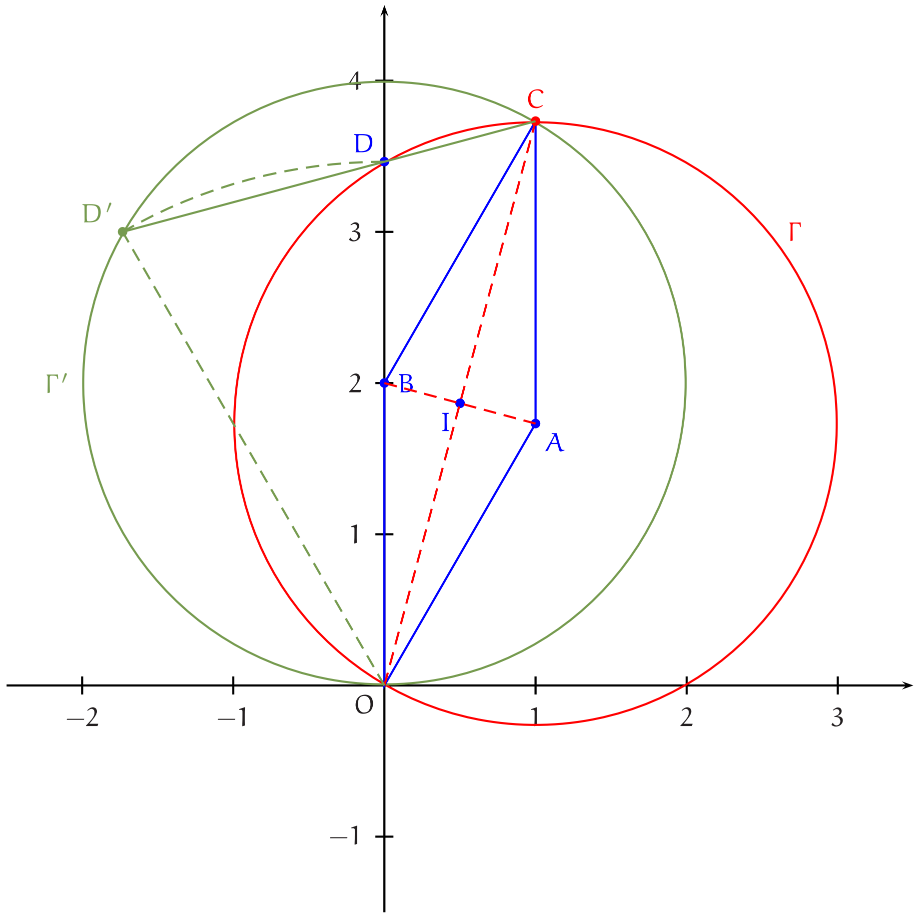
1) a) $|z_A| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ puis

$$z_A = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\pi/3}.$$

Ensuite, $z_B = 2i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{i\pi/2}$.

$$\boxed{z_A = 2e^{i\pi/3} \text{ et } z_B = 2e^{i\pi/2}.}$$

b)



c) $OA = |z_A| = 2$ et $OB = |z_B| = 2$. Donc $OA = OB$ et

$$\boxed{\text{le triangle OAB est isocèle en O.}}$$

2) a) $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\pi/2}}{2e^{i\pi/3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\pi/6}$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - 0}{z_A - 0}\right) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi].}$$

b) r est donc la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Son expression complexe est $z' = 0 + e^{i\pi/6}(z - 0)$ ou encore $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$.

$$\boxed{\text{L'expression complexe de } r \text{ est } z' = e^{i\pi/6}z \text{ ou aussi } z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z.}$$

3) a) Le cercle de centre A (resp. B) passant par O est le cercle de centre A (resp. B) et de rayon 2
L'image par r du cercle de centre A et de rayon 2 est le cercle de centre $r(A) = B$ et de même rayon à savoir 2. Donc

$$\boxed{\text{l'image par } r \text{ du cercle } \Gamma \text{ est le cercle } \Gamma'.}$$

b) $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1 + i\sqrt{3} + 2i}{2} = \dfrac{1 + i(2 + \sqrt{3})}{2}$.
c) C appartient à Γ et à Γ'. Donc, $AC = 2 = BC$. Ainsi, $OA = OB = AC = BC$ et

$$\boxed{\text{le quadrilatère } OACB \text{ est un losange.}}$$

d) Mais alors le milieu I de $[AB]$ est aussi le milieu de $[OC]$.
On en déduit que $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$ ou encore que $z_C = 2z_I = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right) i$.

$$\boxed{z_C = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right) i.}$$

4) a) $AD = |z_D - z_A| = |2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et donc le point D appartient au cercle Γ.
b) D'après la question 2)b),

$$z_{D'} = e^{i\pi/6} z_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \times (2i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 3i.$$

5)

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = \left(1 + (2 + \sqrt{3})i\right) - \left(2i\sqrt{3}\right) = 1 + \left(2 - \sqrt{3}\right) i$$

et

$$z_{\overrightarrow{DD'}} = z_{D'} - z_D = \left(-\sqrt{3} + 3i\right) - 2i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + \left(3 - 2\sqrt{3}\right) i.$$

Donc

$$-\sqrt{3} z_{\overrightarrow{DC}} = -\sqrt{3} + \left(3 - 2\sqrt{3}\right) i = z_{\overrightarrow{DD'}}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{DD'} = -\sqrt{3}\overrightarrow{DC}$ et donc que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. On en déduit encore que

$$\boxed{\text{les points } C, D \text{ et } D' \text{ sont alignés.}}$$

