BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1) a) Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x^2} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Le trinôme du second degré $x(2-x) = -x^2+2x$ admet les deux racines 0 et 2 et, puisque le coefficient de x^2 est strictement négatif, on sait que $x(2-x) < 0$ si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et $x(2-x) > 0$ si $x \in]0, 2[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

c) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$. Donc pour tout réel x non nul, $f(x) > 0$. D'autre part, $f(0) = 0$. Le signe de f sur $\mathbb{R}$ est donné par le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

2) a) Soit a un réel. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Donc si $a \geqslant 0$, $I(a) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. Si $a \leqslant 0$, toujours par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^0 f(x)\,dx \geqslant 0$. Maintenant, $I(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(x)\,dx$ et donc $I(a) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a,\ I(a) \geqslant 0 \text{ si } a \geqslant 0 \text{ et } I(a) \leqslant 0 \text{ si } a \leqslant 0.}$$

b) Soit a un réel. Notons K le segment $[0, a]$ si $a \geqslant 0$ ou $[a, 0]$ si $a \leqslant 0$. Pour x dans K, posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur K et pour x dans K on a

$$u(x) = x^2 \qquad v(x) = -e^{-x}$$
$$u'(x) = 2x \qquad v'(x) = e^{-x}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur K. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^a x^2e^{-x}\,dx = \left[x^2(-e^{-x})\right]_0^a - \int_0^a (2x)(-e^{-x})\,dx = -a^2e^{-a} + 0 + 2\int_0^a xe^{-x}\,dx \\ &= -a^2e^{-a} + 2\int_0^a xe^{-x}\,dx. \end{aligned}$$

Effectuons une nouvelle intégration par parties.

$$\begin{aligned} I(a) &= -a^2e^{-a} + 2\int_0^a xe^{-x}\,dx = -a^2e^{-a} + 2\left(\left[x(-e^{-x})\right]_0^a - \int_0^a (-e^{-x})\,dx\right) \\ &= -a^2e^{-a} + 2\left(-ae^{-a} + 0 + \int_0^a e^{-x}\,dx\right) = -a^2e^{-a} - 2ae^{-a} + 2\left(\left[-e^{-x}\right]_0^a\right) \\ &= -a^2e^{-a} - 2ae^{-a} + 2(-e^{-a} + e^0) = 2 - 2e^{-a} - 2ae^{-a} - a^2e^{-a} = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Pour tout réel a, $I(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right)$.

c) En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\dfrac{1}{2}e^a$, on obtient

$$\frac{1}{2}e^a I(a) = \frac{1}{2}e^a \times 2 - \frac{1}{2}e^a \times 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

Pour tout réel a, $\dfrac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right)$.

3) a) D'une part, $g(0) = h(0) = 1$ et d'autre part, $g'(0) = e^0 = 1$ et $h'(0) = 1 + 0 = 1$. Donc les tangentes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ en leur point d'abscisse 0 passent par le point de coordonnées $(0, 1)$ et ont même coefficient directeur. On en déduit que

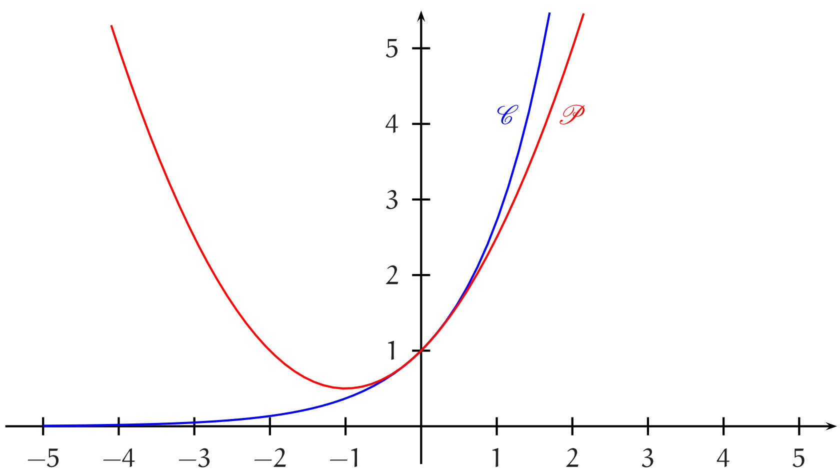
les courbes $\mathscr{C}$ et ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b) D'après la question 2)c), pour tout réel x,

$$g(x) - h(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}e^x I(x).$$

Mais pour tout réel x, $\dfrac{1}{2}e^x > 0$. Donc pour tout réel x, $g(x) - h(x)$ est du signe de $I(x)$, signe qui a été étudié à la question 2)a). On en déduit que

$\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ sur $[0, +\infty[$ et au-dessous sur $]-\infty, 0]$.



EXERCICE 2

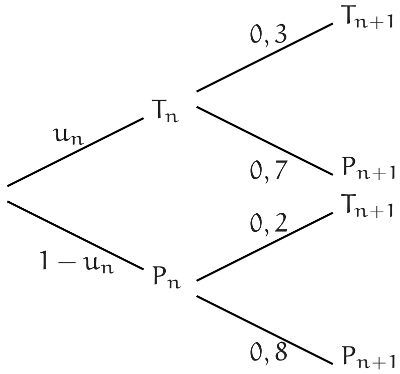
1) a) L'énoncé donne $p(T_1) = \dfrac{1}{2}$ et $p(P_1) = p(\overline{T_1}) = \dfrac{1}{2}$ puis $p_{T_1}(T_2) = 0,3$ et $p_{P_1}(T_2) = 1 - p_{P_1}(P_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

b) D'après la formule des probabilités totales et puisque P_2 est l'événement contraire de l'événement T_2,

$$\begin{aligned} p(T_2) &= p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = p(T_1) \times p_{T_1}(T_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(T_2) \\ &= \frac{1}{2} \times 0,3 + \frac{1}{2} \times 0,2 = \frac{1}{2} \times (0,3 + 0,2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(T_2) = \frac{1}{4}.}$$

c) Représentons la situation par un arbre.



$p_{T_n}(P_{n+1}) = 1 - p_{T_n}(T_{n+1}) = 1 - 0,3 = 0,7$

$p_{P_n}(T_{n+1}) = 1 - p_{P_n}(P_{n+1}) = 1 - 0,2 = 0,8$

d) D'après la formule des probabilités totales et puisque P_n et P_{n+1} sont respectivement les événements contraires de T_n et T_{n+1},

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = p(T_n) \times p_{T_n}(T_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n}(T_{n+1}) \\ &= u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,1\ u_n + 0,2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,1\ u_n + 0,2.}$$

e) La machine donne

n	u_n
1	$0,5$
2	$0,25$
3	$0,225$
4	$0,2225$
5	$0,22225$
6	$0,222225$

Il semblerait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0,222\ldots$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{10}{45}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{10} \text{ et de premier terme } v_1 = \frac{5}{18}.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{5}{18 \times 10^{n-1}}.$$

On en déduit que $u_n = \frac{2}{9} + v_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18 \times 10^{n-1}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18 \times 10^{n-1}}.}$$

c) Puisque $10 > 1$, $\lim_{n \to +\infty} 10^n = +\infty$ puis $\lim_{n \to +\infty} \frac{5}{18 \times 10^{n-1}} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}.}$$

Puisque $\frac{2}{9} = 0,222\ldots$, la conjecture émise en 1)e) est validée.

EXERCICE 3

1) Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. Ensuite, puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AD}$, le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$.
Puisque $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et Puisque $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$.

Le point I milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2}\right)$ ou encore $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$. De même, le point J milieu de $[BF]$ a pour coordonnées $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ et le point K milieu de $[HF]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\boxed{I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right),\ J\left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \text{ et } K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).}$$

2) Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $(x_K - x_I, y_K - y_I, z_K - z_I)$ ou encore $\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$. De même, le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IK} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ} = 2 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK). Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal au plan (IJK).

Le plan (IJK) est le plan passant par $I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, 1, 1)$. Une équation cartésienne du plan (IJK) est donc $2 \times (x - 1) + 1 \times \left(y - \frac{1}{2}\right) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $2x + y + z - \frac{5}{2} = 0$ ou enfin

$$\boxed{\text{une équation du plan } (IJK) \text{ est } 4x + 2y + 2z - 5 = 0.}$$

3) a) La droite (CD) est la droite passant par le point $D(0, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC}(1, 0, 0)$. Donc

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de la droite } (CD) \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.,\ t \in \mathbb{R}.}$$

b) Soit $M(t, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CD).

$$M \in (IJK) \Leftrightarrow 4t + 2 + 0 - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}.$$

Quand $t = \frac{3}{4}$, on obtient le point $R\left(\frac{3}{4}, 1, 0\right)$.

$$\boxed{\text{Le point d'intersection du plan } (IJK) \text{ et de la droite } (CD) \text{ est le point } R\left(\frac{3}{4}, 1, 0\right).}$$

c) Voir figure page suivante.

4) Les plans (ABD) et (EFH) sont parallèles. Le plan (IKR) est sécant au plan (ABD) selon la droite (IR). On sait alors que le plan (IKR) coupe le plan (EFH) en une droite parallèle à la droite (IR).
Puisque le point K est commun aux plans (EFH) et (IKR), l'intersection de ces deux plans est la parallèle à la droite (IR) passant par K. Cette droite coupe les arêtes (EF) et (GH) en deux points M et N. La section du cube par le plan (IJK) est le polygone IRNMJ.

Voir figure page suivante.

5) a) Le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et le plan (IJK) a pour équation $4x + 2y + 2z - 5 = 0$. Donc

$$d\left(G, (IJK)\right) = \frac{|4 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 - 5|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2 \times 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\boxed{d\left(G, (IJK)\right) = \frac{\sqrt{6}}{4}.}$$

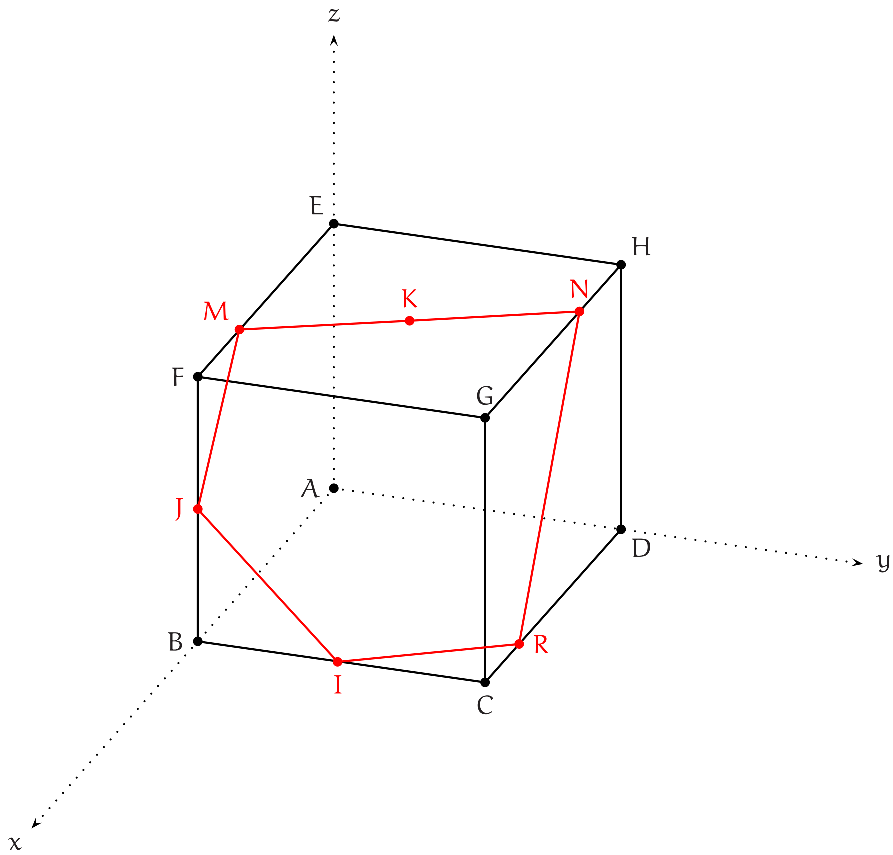
b) Le rayon ρ de la sphère $\mathscr{S}$ est

$$\rho = \mathrm{GF} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2} = 1.$$

D'après la question a), la distance d du centre G de $\mathscr{S}$ au plan (IJK) est $d = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Par suite, $d < \rho$ et on sait alors que la sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont sécants en un cercle. De plus, si on note r le rayon de ce cercle, le théorème de PYTHAGORE permet d'affirmer que $\rho^2 = r^2 + d^2$ et donc que

$$r = \sqrt{\rho^2 - d^2} = \sqrt{1 - \frac{6}{16}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$$\boxed{\text{Le rayon du cercle intersection de la sphère } \mathscr{S} \text{ et du plan } (IJK) \text{ est } \dfrac{\sqrt{10}}{4}.}$$



EXERCICE 4

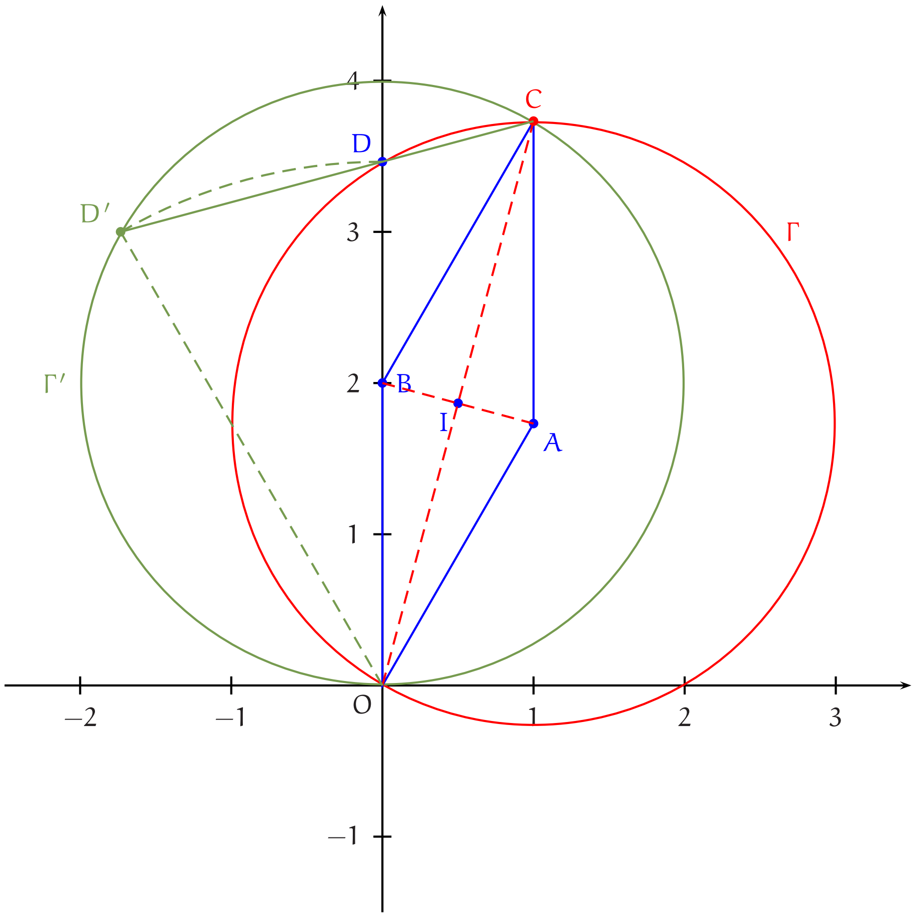
1) a) $|z_A| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ puis

$$z_A = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\pi/3}.$$

Ensuite, $z_B = 2i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{i\pi/2}$.

$$\boxed{z_A = 2e^{i\pi/3} \text{ et } z_B = 2e^{i\pi/2}.}$$

b)



c) $OA = |z_A| = 2$ et $OB = |z_B| = 2$. Donc $OA = OB$ et

$$\boxed{\text{le triangle OAB est isocèle en O.}}$$

2) a) $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{2e^{i\pi/2}}{2e^{i\pi/3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\pi/6}$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - 0}{z_A - 0}\right) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi].}$$

b) r est donc la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. Son expression complexe est $z' = 0 + e^{i\pi/6}(z - 0)$ ou encore $z' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z$.

$$\boxed{\text{L'expression complexe de } r \text{ est } z' = e^{i\pi/6}z \text{ ou aussi } z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z.}$$

3) a) Le cercle de centre A (resp. B) passant par O est le cercle de centre A (resp. B) et de rayon 2
L'image par r du cercle de centre A et de rayon 2 est le cercle de centre $r(A) = B$ et de même rayon à savoir 2. Donc

$$\boxed{\text{l'image par } r \text{ du cercle } \Gamma \text{ est le cercle } \Gamma'.}$$

b) $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1 + i\sqrt{3} + 2i}{2} = \dfrac{1 + i(2 + \sqrt{3})}{2}$.
c) C appartient à Γ et à Γ'. Donc, $AC = 2 = BC$. Ainsi, $OA = OB = AC = BC$ et

$$\boxed{\text{le quadrilatère } OACB \text{ est un losange.}}$$

d) Mais alors le milieu I de $[AB]$ est aussi le milieu de $[OC]$.
On en déduit que $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$ ou encore que $z_C = 2z_I = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right) i$.

$$\boxed{z_C = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right) i.}$$

4) a) $AD = |z_D - z_A| = |2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et donc le point D appartient au cercle Γ.
b) D'après la question 2)b),

$$z_{D'} = e^{i\pi/6} z_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) \times (2i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 3i.$$

5)

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = \left(1 + (2 + \sqrt{3})i\right) - \left(2i\sqrt{3}\right) = 1 + \left(2 - \sqrt{3}\right) i$$

et

$$z_{\overrightarrow{DD'}} = z_{D'} - z_D = \left(-\sqrt{3} + 3i\right) - 2i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + \left(3 - 2\sqrt{3}\right) i.$$

Donc

$$-\sqrt{3} z_{\overrightarrow{DC}} = -\sqrt{3} + \left(3 - 2\sqrt{3}\right) i = z_{\overrightarrow{DD'}}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{DD'} = -\sqrt{3}\overrightarrow{DC}$ et donc que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. On en déduit encore que

$$\boxed{\text{les points } C, D \text{ et } D' \text{ sont alignés.}}$$

