

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) direct d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3 + 4i$. Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$ et $z_D = -2\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 2)$.

L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C .

1.
 - a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D .
 - b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.

2. Soit F l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.
 - a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.
 - b. Montrer que le point F est le milieu du segment $[CD]$.
 - c. Montrer que $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.
Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A , B et F et réaliser la figure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$$A(4 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 3) \text{ et } E\left(\frac{2}{3} ; -\frac{2}{3} ; \frac{1}{9}\right).$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC) .

RAPPEL : Soit (P) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des réels avec a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $(x_M ; y_M ; z_M)$. La distance δ_M du point M au plan (P) est égale à

$$\frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1.
 - a. Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.
 - b. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $(3 ; 6 ; 4)$. Montrer que \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC) .
 - c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.
 - d. Dédurre des questions précédentes la distance δ_E .
2.
 - a. Montrer que la droite (D) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E .

- b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC) .
 - c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_E .

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'événement : « la n -ème cible est atteinte »,
- $\overline{A_n}$ l'événement : « la n -ème cible n'est pas atteinte »,
- a_n la probabilité de l'événement A_n ,
- b_n la probabilité de l'événement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1 . Calculer a_2 et b_2 . On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$ puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme U_1 .

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n , puis l'expression de a_n en fonction de n .

c. Déterminer la limite de la suite (a_n) .

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n > 0,6665$.

EXERCICE 4 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (1 + x)e^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm.

1.
 - a. Étudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .
 - b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} . Calculer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^n f(x) dx.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

- a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n > 0$.
 - b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3.
 - a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x) dx = (-2 - b)e^{-b} + (2 + a)e^{-a}.$$

- b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n .
 - c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
 - d. Donner une interprétation graphique de cette limite.
4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e$. Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?