BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1) a) Notons B' l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (que l'on note r). On sait que l'expression complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est $z' = z_\Omega + e^{i\theta}(z - z_\Omega)$. Donc

$$\begin{aligned} z_{B'} &= z_A + e^{2i\pi/3}(z_B - z_A) = 1 + \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)(3 + 4i - 1) = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + 4i) \\ &= 1 - 1 - 2i + i\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + i\left(-2 + \sqrt{3}\right) = z_D. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{l'image du point B par la rotation de centre } A \text{ et d'angle } \frac{2\pi}{3} \text{ est le point } D.}$$

b) Puisque $r(B) = D$, par définition d'une rotation, on a $AB = AD$. B et D sont donc sur un certain cercle de centre A. Le rayon de ce cercle est

$$AB = |z_B - z_A| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$\boxed{\text{B et D sont sur le cercle de centre A et de rayon } 2\sqrt{5}.}$$

2) a) On sait que l'expression complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est $z' = z_\Omega + k(z - z_\Omega)$. Donc

$$z_F = z_B + \frac{3}{2}(z_A - z_B) = 3 + 4i + \frac{3}{2}(1 - 3 - 4i) = 3 + 4i + \frac{3}{2}(-2 - 4i) = 3 + 4i - 3 - 6i = -2i.$$

$$\boxed{z_F = -2i.}$$

b) L'affixe du milieu du segment [CD] est

$$\frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) - 2\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 2)}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i = z_F.$$

Donc,

$$\boxed{\text{le point F est le milieu du segment [CD].}}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} &= \frac{2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) + 2i}{1 + 2i} = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1 + 2i} = \frac{-i\sqrt{3}(1 + 2i)}{1 + 2i} \\ &= -i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}.}$$

De plus, $-i\sqrt{3} = \sqrt{3}(-i) = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{3}\,e^{-i\pi/2}$. Donc

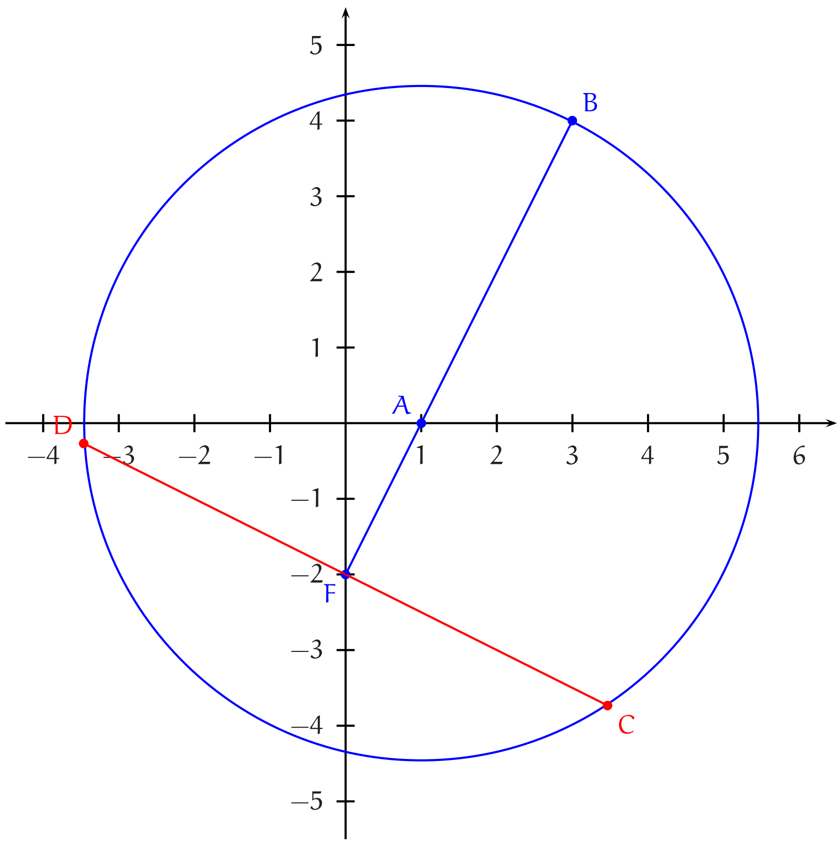
$$\boxed{\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}\,e^{-i\pi/2}.}$$

En particulier, $\left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On en déduit que la droite (AF) est perpendiculaire à la droite (FC).

En résumé, le point F est le milieu du segment $[CD]$ et la droite (AF) est perpendiculaire à la droite (FC). Par suite,

$$\boxed{\text{la droite } (AF) \text{ est la médiatrice du segment } [CD].}$$

3) On place les points A et B puis le point F. On construit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A passant par B. D'après la question 1)b), le point D est sur ce cercle. Comme le point A est sur la médiatrice du segment $[CD]$ d'après 2)c), le point C est également sur ce cercle. On construit alors la perpendiculaire (Δ) à la droite (AF) en F. Toujours d'après 2)c), les points C et D sont également sur cette droite et sont donc les points d'intersection de (Δ) et de $(\mathscr{C})$. Enfin, le point C est celui des deux points obtenus qui a la plus grande abscisse.



EXERCICE 2

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-4, 2, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-4, 0, 3)$. Ces deux vecteurs, tous deux non nuls, ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $0 \times k = 3$ (en analysant la 3ème coordonnée) ce qui est impossible. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés et par suite

$$\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ définissent bien un plan.}}$$

b) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 3 \times (-4) + 6 \times 2 + 4 \times 0 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 3 \times (-4) + 6 \times 0 + 4 \times 3 = 0$.
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (ABC).}$$

c) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(4, 0, 0)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3, 6, 4)$. Une équation cartésienne de ce plan est donc $3(x - 4) + 6(y - 0) + 4(z - 0) = 0$ ou encore $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.

$$\boxed{\text{Une équation du plan } (ABC) \text{ est } 3x + 6y + 4z - 12 = 0.}$$

d) On en déduit que

$$\delta_E = \frac{\left|3 \times \frac{2}{3} + 6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 \times \frac{1}{9} - 12\right|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{\left|-14 + \frac{4}{9}\right|}{\sqrt{61}} = \frac{122}{9\sqrt{61}} = \frac{2\sqrt{61}}{9}.$$

$$\boxed{\delta_E = \frac{2\sqrt{61}}{9}.}$$

2) a) Pour $t = -\frac{1}{3}$, on obtient $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$ et $z = \frac{1}{9}$. Ceci montre que le point E appartient à la droite (D).
D'autre part, la droite (D) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\left(1, 2, \frac{4}{3}\right)$. Mais alors $3\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(3, 6, 4)$ ou encore $3\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n}$. Puisque le vecteur $\overrightarrow{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$, la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABC).

$$\boxed{\text{La droite } (D) \text{ est la perpendiculaire au plan } (ABC) \text{ passant par le point } E.}$$

b) Le projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC) est donc l'intersection de la droite (D) et du plan (ABC). Soit $M\left(1 + t, 2t, \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (D).

$$\begin{aligned} M \in (ABC) &\Leftrightarrow 3(1 + t) + 6(2t) + 4\left(\frac{5}{9} + \frac{4}{3}t\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{61}{3}t - \frac{61}{9} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{61}{9} \times \frac{3}{61} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Pour $t = \frac{1}{3}$, on obtient $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ et $z = 1$.

$$\boxed{\text{Le point } G \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right).}$$

c)

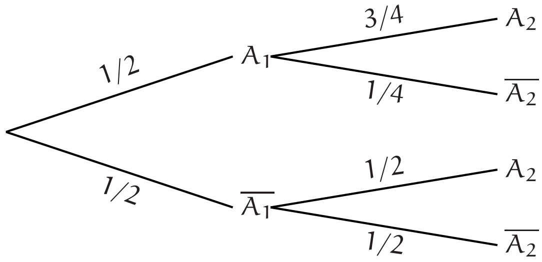
$$\delta_E = EG = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{81}} = \sqrt{\frac{244}{81}} = \frac{2\sqrt{61}}{9}.$$

On a ainsi retrouvé

$$\boxed{\delta_E = \frac{2\sqrt{61}}{9}.}$$

EXERCICE 3

1) L'énoncé donne $a_1 = p(A_1) = \frac{1}{2}$ puis $b_1 = p(\overline{A_1}) = 1 - p(A_1) = 1 - a_1 = \frac{1}{2}$.
L'énoncé donne encore $p_{A_1}(A_2) = \frac{3}{4}$ et $p_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{1}{2}$. Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_2 = p(A_2) &= p(A_1 \cap A_2) + p(\overline{A_1} \cap A_2) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) + p(\overline{A_1}) \times p_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}, \end{aligned}$$

et donc aussi $b_2 = 1 - a_2 = \frac{3}{8}$.

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{2},\ b_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{5}{8} \text{ et } b_2 = \frac{3}{8}.}$$

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Toujours d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = p(A_{n+1}) &= p(A_n \cap A_{n+1}) + p(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\overline{A_n}) \times p_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}.}$$

3) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} U_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}U_n. \end{aligned}$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $U_1 = a_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$.

$$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{4} \text{ et de premier terme } U_1 = -\frac{1}{6}.}$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = U_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{6 \times 4^{n-1}}$. On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $a_n = \frac{2}{3} + U_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6 \times 4^{n-1}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6 \times 4^{n-1}}.}$$

c) $4 > 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^{n-1} = +\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{6 \times 4^{n-1}} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}.}$$

d) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
a_n > 0,6665 &\Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{6\times 4^{n-1}} > 0,6665 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3} - 0,6665 > \frac{1}{6\times 4^{n-1}} \\
&\Leftrightarrow 4^{n-1} > \frac{1}{6\left(\dfrac{2}{3}-0,6665\right)} \text{ (car } \frac{2}{3} - 0,6665 > 0) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(4^{n-1}\right) > \ln\left(\frac{1}{6\left(\dfrac{2}{3}-0,6665\right)}\right) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow (n-1)\ln(4) > \ln\left(\frac{1}{6\left(\dfrac{2}{3}-0,6665\right)}\right) \\
&\Leftrightarrow n-1 > \frac{1}{\ln(4)}\times\ln\left(\frac{1}{6\left(\dfrac{2}{3}-0,6665\right)}\right) \text{ (car } \ln(4) > 0) \\
&\Leftrightarrow n > 1 + \frac{1}{\ln(4)}\times\ln\left(\frac{1}{6\left(\dfrac{2}{3}-0,6665\right)}\right) \\
&\Leftrightarrow n > 5,9\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 6 \text{ (car } n \text{ est entier).}
\end{aligned}$$

Le plus petit entier naturel n tel que $a_n > 0,6665$ est 6.

EXERCICE 4

1) **a)** Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc $f(x)$ est du signe de $1+x$. On en déduit le tableau de signes

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b) • **Limite de f en $-\infty$.** $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+x)e^{-x} = -\infty$.

• **Limite de f en $+\infty$.** Pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} + xe^{-x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

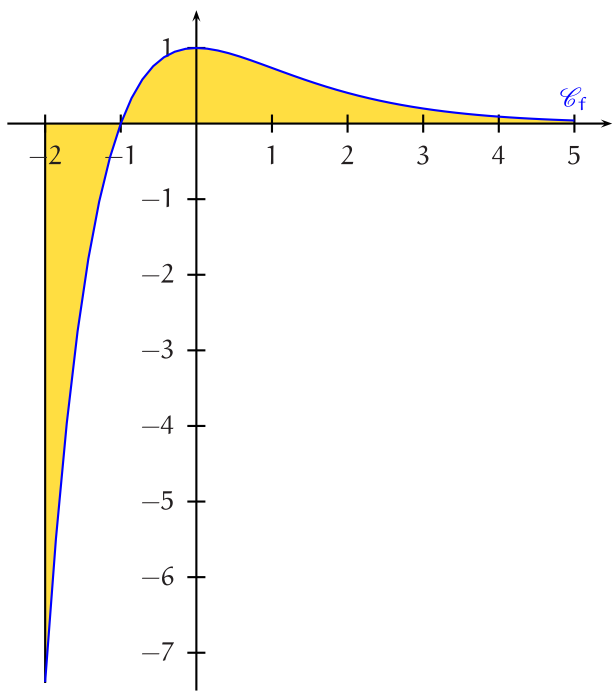
$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-e^{-x}) = (1-x-1)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $-x$. On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(0) = (1+0)e^{0} = 1$

d) Graphe.



2) **a)** Soit n un entier naturel. D'après la question 1)a), la fonction f est positive sur $[-1, +\infty[$ et en particulier sur $[-1, n]$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $I_n \geqslant 0$.

Plus précisément, d'après la relation de Chasles,

$$\int_{-1}^{n} f(x)\,dx = \int_{-1}^{-1/2} f(x)\,dx + \int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{n} f(x)\,dx \geqslant 0 + \int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx + 0 = \int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx.$$

D'après la question 1)c), la fonction f est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Par suite,

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } \left[-\frac{1}{2}, 0\right],\ f(x) \geqslant f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{2}.$$

D'après l'inégalité de la moyenne, $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx \geqslant \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \times \frac{e^{1/2}}{2}$. Finalement, $I_n \geqslant \dfrac{e^{1/2}}{4} > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ I_n > 0.}$$

b) Soit n un entier naturel. D'après la relation de Chasles

$$I_{n+1} - I_n = \int_{-1}^{n+1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{n} f(x)\,dx = \int_{-1}^{n} f(x)\,dx + \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{n} f(x)\,dx = \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx.$$

La fonction f est positive sur le segment $[n, n+1]$ et donc, par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

3) a) Pour x appartenant à $[a, b]$, posons $u(x) = x + 1$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les deux fonctions u et v sont définies et dérivables sur le segment $[a, b]$ et pour tout réel x de $[a, b]$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$. De plus les deux fonctions u' et v' sont continues sur le segment $[a, b]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et en posant

$$\begin{array}{ll} u(x) = x + 1 & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{b} (x+1)e^{-x}\,dx &= \left[(x+1) \times (-e^{-x})\right]_a^b - \int_{a}^{b} 1 \times (-e^{-x})\,dx \\
&= -(b+1)e^{-b} + (a+1)e^{-a} + \int_{a}^{b} e^{-x}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= -(b+1)e^{-b} + (a+1)e^{-a} + \left[-e^{-x}\right]_a^b = -(b+1)e^{-b} + (a+1)e^{-a} + (-e^{-b} + e^{-a}) \\
&= (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous réels } a \text{ et } b,\ \int_{a}^{b} f(x)\,dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.}$$

b) Quand $a = -1$ et $b = n$, on obtient

$$I_n = (-2-n)e^{-n} + (2-1)e^{1} = e - (n+2)e^{-n}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ I_n = e - (n+2)e^{-n}.}$$

c) Pour tout entier naturel n, $(n+2)e^{-n} = \dfrac{n}{e^n} + \dfrac{2}{e^n}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{e^n} = 0$ et d'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e - (n+2)e^{-n} = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = e.}$$

d) Puisque la fonction f est positive sur $[-1, +\infty[$, la limite est « l'aire du domaine infini » délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e &\Leftrightarrow e - (\alpha+2)e^{-\alpha} = e \Leftrightarrow (\alpha+2)e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 = 0 \text{ (car pour tout réel } x,\ e^{-x} \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \alpha = -2.
\end{aligned}$$

La fonction f est négative sur le segment $[-2, -1]$ et donc l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -2$ et $x = -1$ est $\int_{-2}^{-1} (-f(x))\ dx$ ou encore $\int_{-1}^{-2} f(x)\ dx$.
En résumé, ce calcul intégral correspond à un calcul d'aire.

Remarque. Cette aire est égale à e d'après le calcul précédent et est la même que l'aire du domaine infini de la question 3)d).

