Session 2009

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices. *La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

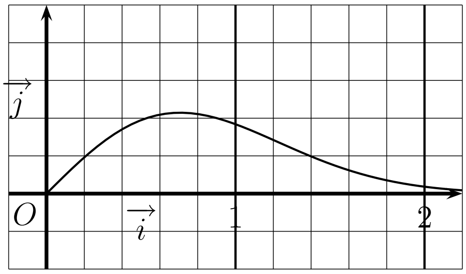
EXERCICE 1 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

0n désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$).

b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\ dx.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et 1

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$?

c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On se donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	$0,5$	$0,5$	$0,5$

Interprétez ces résultats.

EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$

1. Justifier qu'il existe une similitude directe S telle que :

$$s(O) = A \text{ et } s(A) = B.$$

2. Montrer que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 - i)z + i.$$

Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).

On considère la suite de points (A_n) telle que :

- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = s(A_n)$.

On note z_n l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - i)^n$.

b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$. Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.

c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.
Construire les points A_3 et A_4.

4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points :
A de coordonnées $(1,1,0)$, B de coordonnées $(2,0,3)$, C de coordonnées $(0,-2,5)$ et D de coordonnées $(1,-5,5)$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x,y,z) tels que $y = 2x+4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées $(3,3,0)$ et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x+2y+z+3=0$.

EXERCICE 4 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué, la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable X ?

b. Quelle est son espérance ?

c. Calculer $p(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les événements D et A suivants :

- D : « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

a. Calculer la probabilité des événements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que $p(A) = \frac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2). On note B_n l'événement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'événement B_n.

b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.