BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

France métropolitaine

EXERCICE 1

1) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{3}.}$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel n

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Or $v_0 = u_0 - 6 = -5$ et donc pour tout entier naturel n on a

$$u_n = v_n + 6 = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6.}$$

c) Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. On en déduit que la suite (u_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 6.}$$

2) a) $10w_{10} = 11w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$ et donc $w_{10} = \frac{210}{10} = 21$.

$$\boxed{w_{10} = 21.}$$

b) Il semblerait que pour tout entier naturel n, on ait $w_n = 2n + 1$. Prouvons-le par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a $2 \times 0 + 1 = 1 = w_0$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $w_{n-1} = 2(n-1) + 1$ ou encore $w_{n-1} = 2n - 1$.

$$w_n = \frac{(n+1)w_{n-1} + 1}{n} = \frac{(n+1)(2n-1) + 1}{n} = \frac{2n^2 + n}{n} = 2n + 1.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, on ait $w_n = 2n + 1$. En particulier

$$\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison 2 et } w_{2009} = 4019.}$$

Si on n'aime pas passer de $n-1$ à n et que l'on préfère passer de n à $n+1$, on doit commencer par se réécrire la relation de récurrence : pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 1$. La démonstration principale s'écrit alors

$$w_{n+1} = \frac{(n+2)w_n + 1}{n+1} = \frac{(n+2)(2n+1)+1}{n+1} = \frac{2n^2+5n+3}{n+1} = \frac{(n+1)(2n+3)}{n+1} = 2n+3 = 2(n+1)+1.$$

EXERCICE 2

PARTIE I

1) D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0.$$

Puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+xe^{-x}) = \ln(1+0) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

2) La fonction $x \mapsto 1 + xe^{-x}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et est strictement positive sur cet intervalle et la fonction $y \mapsto \ln y$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{(1+xe^{-x})'}{1+xe^{-x}} = \frac{1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})}{1+xe^{-x}} = \frac{(1-x)e^{-x}}{1+xe^{-x}}.$$

Maintenant, pour tout réel positif x, $\dfrac{e^{-x}}{1+xe^{-x}} > 0$. On en déduit que pour tout réel positif x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

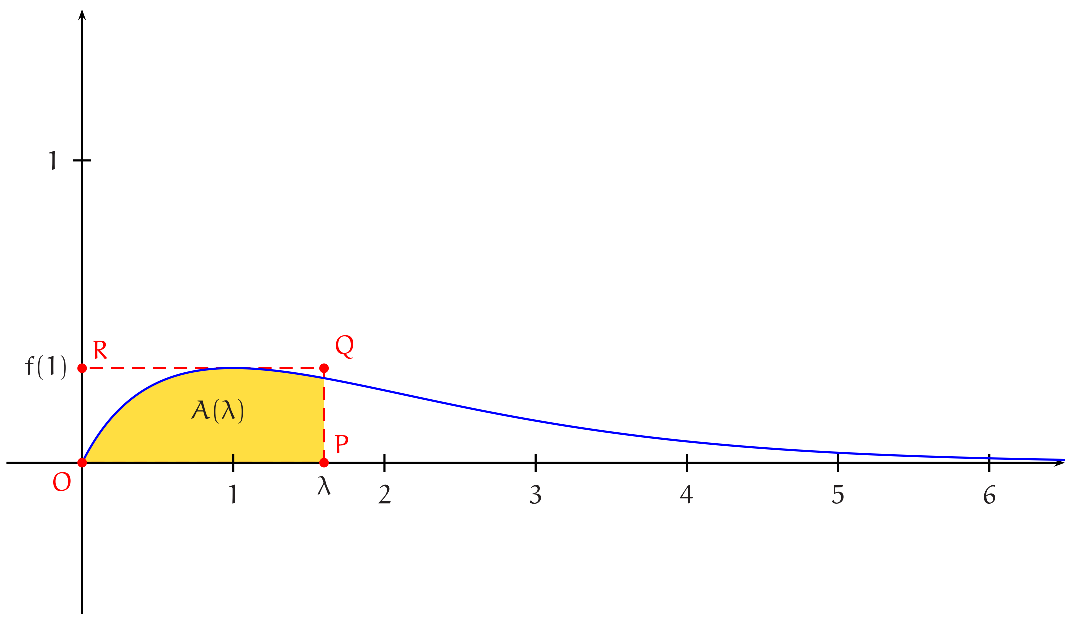
3) On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\ln(1+e^{-1})$	$\searrow$	0

PARTIE II

1) Première méthode.

a) Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est continue et positive sur $[0, \lambda]$. Donc $A(\lambda)$ est l'aire exprimée en unités d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.



b) Puisque la fonction f admet un maximum en 1 d'après la question I.3), le domaine considéré est contenu dans le rectangle $OPQR$ où $P(\lambda, 0)$, $Q(\lambda, f(1))$ et $R(0, f(1))$. Son aire $A(\lambda)$ est donc inférieure ou égale à l'aire de ce rectangle ou encore $A(\lambda) \leqslant \lambda f(1)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \lambda,\ A(\lambda) \leqslant \lambda f(1).}$$

2) Deuxième méthode.

a) Pour x dans $[0, \lambda]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, \lambda]$ et pour x dans $[0, \lambda]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, \lambda]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda xe^{-x}\,dx &= \left[x \times (-e^{-x})\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda 1 \times (-e^{-x})\,dx = -\lambda e^{-\lambda} + 0 - \left[e^{-x}\right]_0^\lambda \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda,\ \int_0^\lambda xe^{-x}\,dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.}$$

b) Soit λ un réel strictement positif. Pour tout réel x de $[0, \lambda]$, le réel $u = xe^{-x}$ est positif. On en déduit que pour tout réel x de $[0, \lambda]$, $\ln(1 + xe^{-x}) \leqslant xe^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient alors

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda \ln(1 + xe^{-x})\,dx \leqslant \int_0^\lambda xe^{-x} = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \lambda,\ A(\lambda) \leqslant -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.}$$

3) Application numérique. Quand $\lambda = 5$, la majoration de la question 1)b) fournit $A(5) \leqslant 5\ln(1 + e^{-1}) = 1,566\ldots$ et donc

$$A(5) \leqslant 1,57.$$

La majoration de la question 2)b) fournit quant à elle $A(5) \leqslant -5e^{-5} - e^{-5} + 1 = 0,959\ldots$ et donc

$$A(5) \leqslant 0,96.$$

Dans le cas où $\lambda = 5$, la méthode de la question 2) fournit un meilleur majorant que la méthode de la question 1).

EXERCICE 3

PARTIE I Restitution organisée de connaissances

Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!}+\frac{(n-1)!}{p!((n-1)-p)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\times(n-p)\times(n-p-1)!}+\frac{(n-1)!}{p\times(p-1)!\times(n-p-1)!}\\
&= \frac{p\times(n-1)!}{p\times(p-1)!\times(n-p)\times(n-p-1)!}+\frac{(n-p)\times(n-1)!}{p\times(p-1)!\times(n-p)\times(n-p-1)!}\\
&= \frac{p\times(n-1)!}{p!\times(n-p)!}+\frac{(n-p)\times(n-1)!}{p!\times(n-p)!} = \frac{p\times(n-1)!+(n-p)\times(n-1)!}{p!\times(n-p)!}\\
&= \frac{(p+n-p)\times(n-1)!}{p!\times(n-p)!} = \frac{n\times(n-1)!}{p!\times(n-p)!} = \frac{n!}{p!\times(n-p)!} = \binom{n}{p}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous entiers naturels } n \text{ et } p \text{ tels que } 1 \leqslant p \leqslant n,\ \binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}.}$$

PARTIE II

1) a) Les différents tirages de deux jetons sont supposés équiprobables. Le nombre de cas possibles est le nombre de façons de tirer simultanément deux jetons parmi dix jetons. Il y en a

$$\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45.$$

Le nombre de cas favorables est le nombre de façons de tirer simultanément les deux jetons parmi les sept jetons blancs. Il y en a

$$\binom{7}{2}=\frac{7\times 6}{2}=21.$$

On en déduit que

$$p(A)=\frac{21}{45}=\frac{3\times 7}{3\times 15}=\frac{7}{15}.$$

b) Il y a toujours 45 cas possibles. D'autre part, il y a 4 jetons blancs portant un numéro impair (1, 3, 5 et 7) et 2 jetons noirs portant un numéro impair (1 et 3) et donc 6 jetons portant un numéro impair. Le nombre de cas favorables est le nombre de façons de tirer simultanément les deux jetons parmi les six jetons portant un numéro impair. Il y en a

$$\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15.$$

On en déduit que

$$p(B)=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$$

c) $p(A)\times p(B)=\dfrac{7}{15}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{45}$. D'autre part, l'événement $A\cap B$ est l'événement « obtenir deux jetons blancs portant des numéros impairs ». Il y a 4 jetons blancs portant des numéros impairs et donc $\dbinom{4}{2}=\dfrac{4\times 3}{2}=6$ tirages de deux jetons blancs portant des numéros impairs. On en déduit que

$$p(A\cap B)=\frac{6}{45}.$$

Comme $p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$, on a montré que

$$\boxed{\text{les événements } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

2) a) X prend trois valeurs : 0, 1 et 2.

- $p(X=0) = \dfrac{\dbinom{7}{0}\times\dbinom{3}{2}}{\dbinom{10}{2}} = \dfrac{1\times 3}{45} = \dfrac{1}{15}$.
- $p(X=1) = \dfrac{\dbinom{7}{1}\times\dbinom{3}{1}}{\dbinom{10}{2}} = \dfrac{7\times 3}{45} = \dfrac{7}{15}$.
- $p(X=2) = \dfrac{\dbinom{7}{2}\times\dbinom{3}{0}}{\dbinom{10}{2}} = \dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$.

$$\boxed{p(X=0) = \frac{1}{15},\ p(X=1) = \frac{7}{15} \text{ et } p(X=2) = \frac{7}{15}.}$$

b) $E(X) = 0\times p(X=0) + 1\times p(X=1) + 2\times p(X=2) = \dfrac{7}{15} + 2\times\dfrac{7}{15} = \dfrac{3\times 7}{15} = \dfrac{7}{5} = 1,4$.

$$\boxed{E(X) = 1,4.}$$

EXERCICE 4

1) a) Le couple $(x_0, y_0) = (1, 1)$ est solution de l'équation $8x - 5y = 3$.
Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

• Si $8x - 5y = 3$, alors $8x - 5y = 8x_0 - 5y_0$ puis $8(x - x_0) = 5(y - y_0)$. L'entier 5 divise l'entier $5(y - y_0)$ et donc l'entier 5 divise l'entier $8(x - x_0)$. Comme les entiers 5 et $8 = 2^3$ sont premiers entre eux, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que l'entier 5 divise l'entier $x - x_0$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 5k$ ou encore $x = x_0 + 5k$. De même, l'entier 8 divise l'entier $y - y_0$ et donc il existe un entier relatif k' tel que $y - y_0 = 8k'$ ou encore $y = y_0 + 8k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 5k$ et $y = y_0 + 8k'$.

$$8x - 5y = 3 \Leftrightarrow 8(x_0 + 5k) - 5(y_0 + 8k') = 8x_0 - 5y_0 \Leftrightarrow 8 \times 5(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k',$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(1 + 5k, 1 + 8k),\ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

b) Soient m, p et q trois entiers relatifs tels que $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$. On a donc $8p + 1 = 5q + 4$ puis $8p - 5q = 3$. Ainsi, le couple (p, q) est solution de l'équation $8x - 5y = 3$. En particulier, il existe un entier relatif k tel que $p = 1 + 5k$. Mais alors

$$m = 8p + 1 = 8(1 + 5k) + 1 = 9 + 40k,$$

et donc $m \equiv 9$ (modulo 40).

c) Soit m un entier relatif congru à 9 modulo 40. Il existe un entier k tel que $m = 9 + 40k$.

$$m \geqslant 2000 \Leftrightarrow 9 + 40k \geqslant 2000 \Leftrightarrow k \geqslant \frac{2000 - 9}{40} \Leftrightarrow m \geqslant 49,775 \Leftrightarrow k \geq 50$$

car k est un entier.

$\boxed{\text{Le plus petit entier supérieur ou égal à 2000 et congru à 9 modulo 40 est } 50 \times 40 + 9 = 2009.}$

2) a) Soit k un entier naturel. $2^3 = 8$ et donc $2^3 \equiv 1$ (modulo 7). Par suite, puisque $2^{3k} = (2^3)^k$, $2^{3k} \equiv 1^k$ (modulo 7) ou encore $2^{3k} \equiv 1$ (modulo 7).

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k,\ 2^{3k} \equiv 1 \text{ (modulo 7).}}$

b) Puisque la somme des chiffres de 2009 est 11, on a $2009 \equiv 11$ (modulo 3) ou encore $2009 \equiv 2$ (modulo 3) (on peut aussi écrire directement $2009 = 669 \times 3 + 2$). Ainsi, il existe un entier naturel k tel que $2009 = 3k + 2$. On a alors $2^{2009} = 2^{3k} \times 2^2$. D'après la question précédente, on a $2^{2009} \equiv 1 \times 2^2$ (modulo 7) et donc $2^{2009} \equiv 4$ (modulo 7). Comme $0 \leqslant 4 < 7$, on a montré que

$\boxed{\text{le reste de la division euclidienne de } 2^{2009} \text{ par 7 est 4.}}$

3) a) $10 \equiv 3$ (modulo 7) et donc $10^3 \equiv 3^3$ (modulo 7) ou encore $10^3 \equiv 27$ (modulo 7) ou encore $10^3 \equiv 27 - 4 \times 7$ (modulo 7) ou enfin $10^3 \equiv -1$ (modulo 7) (on peut aussi écrire $10^3 = 1000 = 143 \times 7 - 1$).

b) D'après a), $N \equiv (-1)a + b$ (modulo 7). Donc

$$\begin{aligned} N \text{ divisible par } 7 &\Leftrightarrow N \equiv 0 \text{ (modulo 7)} \Leftrightarrow b - a \equiv 0 \text{ (modulo 7)} \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in \{(1,1), (1,8), (2,2), (2,9), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,0), (7,7), (8,1), (8,8), (9,2), (9,9).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les entiers solutions sont 1001, 1008, 2002, 2009, 3003, 4004, 5005, 6006, 7000, 7007, 8001, 8008, 9002 et 9009.}}$

