BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Centres étrangers

EXERCICE 1

1) Restitution organisée de connaissances

a) Les événements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ constituent une partition de l'événement B. La formule des probabilités totales fournit alors

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}).$$

b) Supposons maintenant les événements A et B indépendants.

$$\begin{aligned} p(B \cap \overline{A}) &= p(B) - p(B \cap A) \text{ (d'après a))} \\ &= p(B) - p(B) \times p(A) \text{ (car les événements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants)} \\ &= p(B)(1 - p(A)) = p(B) \times p(\overline{A}). \end{aligned}$$

Ceci montre que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

2) Application.

a) La probabilité demandée est $p(\overline{R} \cap S)$. Puisque les événements R et S sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{R}$ et S d'après 1)b). Donc

$$p(\overline{R} \cap S) = p(\overline{R}) \times p(S) = (1 - 0,1) \times 0,05 = 0,045.$$

La probabilité que Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne est $0,045$.

b) Stéphane arrive à l'heure si et seulement si il entend son réveil sonner et son scooter ne tombe pas en panne. La probabilité demandée est donc $p(\overline{R} \cap \overline{S})$. Puisque les événements $\overline{R}$ et S sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{R}$ et $\overline{S}$. Donc

$$p(\overline{R} \cap \overline{S}) = p(\overline{R}) \times p(\overline{S}) = 0,9 \times 0,95 = 0,855.$$

La probabilité que Stéphane soit à l'heure un jour de classe donné est $0,855$.

c) Notons X le nombre de fois où Stéphane entend le réveil sonner. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « Stéphane entend le réveil sonner » avec une probabilité $p = p(\overline{R}) = 0,9$ et « Stéphane n'entend pas le réveil sonner » avec une probabilité $1 - p = p(R) = 0,1$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,9$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 4)$ et on a

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 4) &= p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4} \times 0,9^4 \times 0,1^1 + 0,9^5 = 5 \times 0,9^4 \times 0,1 + 0,9^5 \\ &= 0,9185 \text{ arrondi à la quatrième décimale.} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

1) a) Le couple $(x_0, y_0) = (9, 1)$ est un couple solution de (E). (Un autre couple solution est bien sûr $(x_0, y_0) = (29, -29)$).

b) Soient x et y deux entiers relatifs.

$$\begin{aligned}(x, y) \text{ solution de } (E) &\Rightarrow 3x + 2y = 29 \Rightarrow 3x + 2y = 3x_0 + 2y_0 \\ &\Rightarrow 3(x - x_0) = 2(y_0 - y).\end{aligned}$$

Ainsi, si le couple (x, y) est solution de l'équation (E), nécessairement l'entier 2 divise l'entier $3(x - x_0)$. Mais les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux (car 2 et 3 sont deux nombres premiers distincts) et le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 2 divise $x - x_0$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 2k$ ou encore tel que $x = x_0 + 2k$.
De même, l'entier 3 divise $y - y_0$ et il existe un entier l tel que $y_0 - y = 3l$ ou encore tel que $y = y_0 - 3l$.

Réciproquement, soient k et l deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 2k$ et $y = y_0 - 3l$.

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 3(x_0 + 2k) + 2(y_0 - 3l) = 3x_0 + 2y_0 + 6(k - l) \\ &= 29 + 6(k - l)\end{aligned}$$

et donc le couple (x, y) est solution de (E) si et seulement si $k = l$.

$\boxed{\text{Les couples d'entiers relatifs solutions de } (E) \text{ sont les couples de la forme } (9 + 2k, 1 - 3k),\ k \in \mathbb{Z}.}$

c) Soient k un entier relatif puis $x = 9 + 2k$ et $y = 1 - 3k$.

- $x \geqslant 0 \Leftrightarrow 9 + 2k \geqslant 0 \Leftrightarrow k \geqslant -\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow k \geqslant -4$ (car k est entier).
- $y \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 3k \geqslant 0 \Leftrightarrow k \leqslant \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow k \leqslant 0$.

En résumé, $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ si et seulement si $-4 \leqslant k \leqslant 0$. On obtient ainsi cinq couples solutions :

$\boxed{(1, 13) \quad (3, 10) \quad (5, 7) \quad (7, 4) \quad (9, 1).}$

2) Intersection d'un plan avec les plans de coordonnées.

a) 1ère solution. Les points $A(9, 1, 0)$ et $B(9, 1, 1)$ sont dans le plan $\mathscr{P}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ et donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{k}$. Ceci montre que la droite (AB) est parallèle à l'axe (Oz). Puisque la droite (AB) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$, le plan $\mathscr{P}$ contient une droite parallèle à l'axe (Oz) et on en déduit que

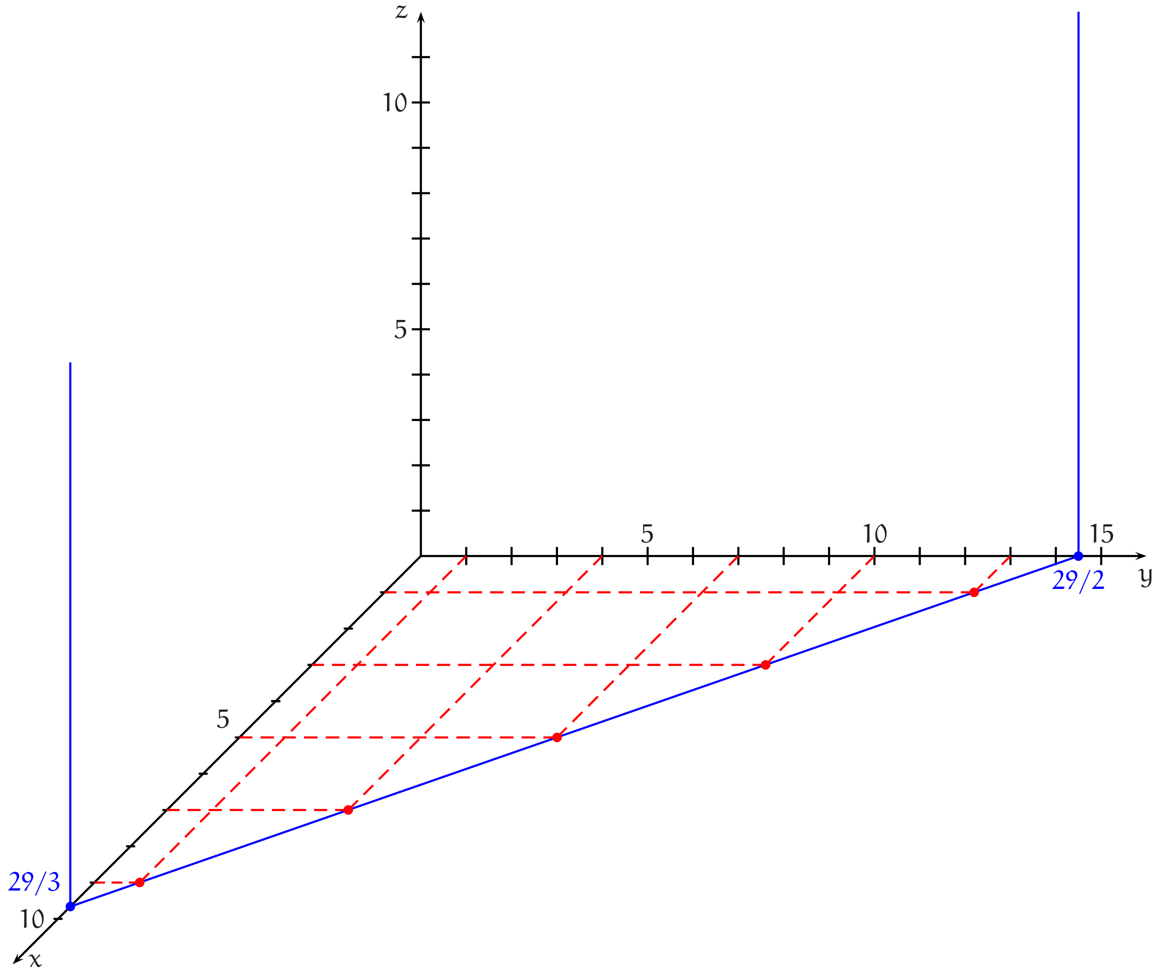
$\boxed{\text{le plan } \mathscr{P} \text{ est parallèle à l'axe } (Oz).}$

2ème solution. Le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3, 2, 0)$. Puisque $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{k} = 3 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 1 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{k}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$. Ceci redémontre que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle à l'axe (Oz).

b) Soit $M(x, 0, 0)$ un point de l'axe (Ox). $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 3x + 2 \times 0 = 29 \Leftrightarrow x = \dfrac{29}{3}$. Le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de l'axe (Ox) est le point de coordonnées $\left(\dfrac{29}{3}, 0, 0\right)$.

Soit $M(0, y, 0)$ un point de l'axe (Oy). $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 3 \times 0 + 2y = 29 \Leftrightarrow y = \dfrac{29}{2}$. Le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de l'axe (Oy) est le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{29}{2}, 0\right)$.

c) et d) Voir figure page suivante.



3) Etude d'une surface.

a) Soit $M(x, y, 0)$ un point du plan (xOy). $M \in \mathscr{S} \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$. L'intersection S_1 de la surface $\mathscr{S}$ est du plan (xOy) est la réunion de l'axe (Ox) et de l'axe (Oy). S_1 est représentée par la figure n° 3.

b) Soit $M(x, y, 1)$ un point du plan $\mathscr{R}$. $M \in \mathscr{S} \Leftrightarrow xy = 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{x}$. S_2 est une hyperbole et est donc représentée par la figure n° 1.

c) Soit $(x, 8, z)$ un point du plan d'équation $y = 8$. $M \in \mathscr{S} \Leftrightarrow 4z = 8x \Leftrightarrow z = 2x$. Ainsi, S_3 est l'ensemble des points de coordonnées $(x, 8, 2x)$ où x décrit $\mathbb{R}$. Il s'agit de la droite passant par le point de coordonnées $(0, 8, 0)$ et dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, 0, 2)$. S_3 est représentée par la figure n° 4.

d) Donc S_4 est représentée par la figure n° 2. Soit $M(x, y, z)$ un point de S_4. D'après la question 2)d), le couple (x, y) a cinq valeurs possibles à savoir $(1, 13)$ $(3, 10)$ $(5, 7)$ $(7, 4)$ $(9, 1)$.

- Si $x = 1$ et $y = 13$, $z = \dfrac{1 \times 13}{4} = \dfrac{13}{4}$. Ceci fournit le point de coordonnées $\left(1, 13, \dfrac{13}{4}\right)$.
- Si $x = 3$ et $y = 10$, $z = \dfrac{3 \times 10}{4} = \dfrac{15}{2}$. Ceci fournit le point de coordonnées $\left(3, 10, \dfrac{15}{2}\right)$.
- Si $x = 5$ et $y = 7$, $z = \dfrac{5 \times 7}{4} = \dfrac{35}{4}$. Ceci fournit le point de coordonnées $\left(5, 7, \dfrac{35}{4}\right)$.
- Si $x = 7$ et $y = 4$, $z = \dfrac{7 \times 4}{4} = 7$. Ceci fournit le point de coordonnées $(7, 4, 4)$.
- Si $x = 9$ et $y = 1$, $z = \dfrac{9 \times 1}{4} = \dfrac{9}{4}$. Ceci fournit le point de coordonnées $\left(9, 1, \dfrac{9}{4}\right)$.

EXERCICE 3

1)	**Faux**
2)	**Vrai**
3)	**Vrai**
4)	**Vrai**

Justifications.

1) $\mathrm{Re}(i^2) = \mathrm{Re}(-1) = -1$ et $(\mathrm{Re}(i))^2 = 0^2 = 0$. Donc $\mathrm{Re}(i^2) \neq (\mathrm{Re}(i))^2$ et la proposition 1 est fausse.

2) $OM = |z|$, $ON = |\overline{z}|$ et $OP = \left|\dfrac{z^2}{\overline{z}}\right|$. On sait que $|\overline{z}| = |z|$ et donc $OM = ON$. D'autre part, $OP = \dfrac{|z|^2}{|\overline{z}|} = \dfrac{|z|^2}{|z|} = |z| = OM$. Finalement $OM = ON = OP$ et la réponse 2 est vraie.

3) 1ère solution. Soient M, A et B les points affixes respectives z, $-i$ et i.

$$\begin{aligned}|1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |i(-i+z)| = |-i(i+z)| \Leftrightarrow |i| \times |z-i| = |-i| \times |z+i| \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Leftrightarrow MA = MB\\ &\Leftrightarrow M \in \mathrm{med}[AB] \Leftrightarrow M \in (Ox) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0.\end{aligned}$$

2ème solution. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}|1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |1+i(x+iy)| = |1-i(x+iy)| \Leftrightarrow |(1-y)+ix| = |(1+y)-ix|\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2} = \sqrt{(1+y)^2+(-x)^2} \Leftrightarrow (1-y)^2+x^2 = (1+y)^2+x^2\\ &\Leftrightarrow 1-2y+y^2 = 1+2y+y^2 \Leftrightarrow 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0.\end{aligned}$$

La proposition 3 est vraie.

4) 1ère solution. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont quatre réels.

$$\begin{aligned}|z+z'| = |z-z'| &\Leftrightarrow \sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\\ &\Leftrightarrow x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2 = x^2-2xx'+x'^2+y^2-2yy'+y'^2\\ &\Leftrightarrow 4(xx'+yy') = 0 \Leftrightarrow xx'+yy' = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0\\ &\Leftrightarrow (OM)\perp(OM').\end{aligned}$$

2ème solution. Soit N le point tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. Le quadrilatère $OMNM'$ est un parallélogramme.

$|z+z'| = \|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = ON$ et $|z-z'| = \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{M'M}\| = M'M$.
Donc si $|z+z'| = |z-z'|$ alors $ON = MM'$ et les diagonales du parallélogramme $OMNM'$ ont même longueur. On sait alors que ce parallélogramme est un rectangle et donc que $(OM)\perp(OM')$. La réponse 4 est vraie.

EXERCICE 4

Partie A - Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$.

1) Soit n un entier naturel. $f_n(0) = \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{2}$ et donc le point A de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n\text{, le point A de coordonnées } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ appartient à la courbe } \mathscr{C}_n.}$$

2) Etude de la fonction f_0.

a) Pour tout réel x, $f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$. Pour tout réel x, $1+e^{-x} > 0$ et donc f_0 est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f_0'(x) = -\frac{0 - e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

On en déduit que pour tout réel x, $f_0'(x) > 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la fonction } f_0 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

b) Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^{-x} = +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_0(x) = 0.}$$

Limite en $+\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = 1.}$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

c) Tableau de variation de la fonction f_0.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	$+$	
f_0	0	1

3) Etude de la fonction f_1.

a) Soit x un réel.

$$f_1(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{1}{1+e^{-x}} = f_0(x).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f_0(x) = f_1(-x).}$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f_0(-x) = \lim\limits_{X \to +\infty} f_0(X) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f_0(-x) = \lim\limits_{X \to -\infty} f_0(X) = 0$.

Etudions maintenant les variations de la fonction f_1.

1ère solution. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f_1'(x) = (f_0(-x))' = -f_0'(-x).$$

Puisque pour tout réel x, $f_0'(-x) > 0$, on en déduit que pour tout réel x, $f_1'(x) < 0$ et donc que la fonction f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2ème solution. La fonction $g\ :\ x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $f_0\ :\ y \mapsto f_0(y)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $f_1 = f_0 \circ h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) Pour tout réel x, le point de $\mathscr{C}_0$ d'abscisse x a même ordonnée que le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse $-x$. Ceci signifie que

$$\boxed{\text{Les courbes } \mathscr{C}_0 \text{ et } \mathscr{C}_1 \text{ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.}}$$

4) Etude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$.

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel x,

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{e^{nx}(1+e^{-x})} = \frac{1}{e^{nx}+e^{nx-x}} = \frac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}.$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• Puisque $n > 0$ et $n-1 > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{nx} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ et de même $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{(n-1)x} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{nx}+e^{(n-1)x}) = 0$. Comme de plus, pour tout réel x, $e^{nx}+e^{(n-1)x} > 0$, on a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ \lim_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty.}$$

• Puisque $n > 0$ et $n-1 > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{nx} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{(n-1)x} = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{nx}+e^{(n-1)x}) = +\infty$ et donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0.}$$

c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout réel x

$$f_n'(x) = -\frac{ne^{nx}+(n-1)e^{(n-1)x}}{(e^{nx}+e^{(n-1)x})^2}.$$

Or, $n > 0$, $n-1 > 0$ et pour tout réel x, $e^{nx} > 0$, $e^{(n-1)} > 0$ et $\left(e^{nx}+e^{(n-1)x}\right)^2 > 0$. Par suite, pour tout réel x, $f_n'(x) < 0$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f_n.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$+\infty \searrow 0$

Partie B - Etude d'une suite liée aux fonctions f_n.

1) La fonction $x \mapsto \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+e^{-x}$. Une primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln(1+e^{-x})$. Par suite,

$$u_1 = \int_0^1 -\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^0) = \ln(2) - \ln(1+e^{-1}).$$

Ensuite,

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\, dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx = \int_0^1 1\, dx = 1 \times 1 = 1,$$

et donc

$$u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln(2) + \ln(1+e^{-1}).$$

$$\boxed{u_0 = 1 - \ln(2) + \ln(1+e^{-1}) \text{ et } u_1 = \ln(2) - \ln(1+e^{-1}).}$$

2) Soit n un entier naturel.

Soit x un réel de $[0,1]$, $1+e^{-x} \geqslant 1 > 0$ et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1+e^{-x}} \leqslant 1$. On multiplie alors les trois membres de cet encadrement par le réel positif e^{-nx} et on obtient

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0,1],\ 0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+e^{-nx}} \leqslant e^{-nx}.$$

Par positivité et croissance de l'intégration, on en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx.}$$

3) Soit n un entier naturel non nul.

$$\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \int_0^1 -\frac{1}{n}\times(-ne^{-nx})\,dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}e^{0} = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

Maintenant, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-e^{-n}}{n} = 0$. En tenant compte de l'encadrement de la question 2), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

