BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

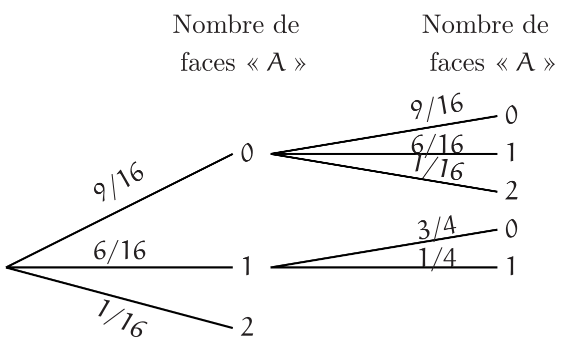
Antilles Guyane

EXERCICE 1

1) Il y a $4 \times 4 = 16$ cas possibles, tous équiprobables. Parmi ces 16 issues possibles, il y a $3 \times 3 = 9$ cas où la lettre A n'apparaît pas, $1 \times 1 = 1$ cas où la lettre A apparaît deux fois et donc $16-9-1 = 6$ cas où la lettre A apparaît exactement une fois. Donc

$$\boxed{p(E_0) = \frac{9}{16},\ p(E_1) = \frac{6}{16} \text{ et } p(E_2) = \frac{1}{16}.}$$

2) a) Représentons la situation par un arbre.



b) D'après la formule des probabilités totales, la probabilité cherchée est

$$\frac{9}{16} \times \frac{1}{16} + \frac{6}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{9}{256} + \frac{6}{64} + \frac{1}{16} = \frac{9+24+16}{256} = \frac{49}{256}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité de gagner est de } \frac{49}{256}.}$$

c) Le gain algébrique est 5 euros si le A sort deux fois avec une probabilité de $\frac{49}{256}$ et de -5 euros si le A ne sort pas avec une probabilité de $\frac{9}{16} \times \frac{9}{16} = \frac{81}{256}$. Enfin, ce gain est de 0 euro dans le dernier cas. Le gain algébrique moyen est donc

$$E(X) = \frac{49}{256} \times 5 + \left(1 - \frac{49}{256} - \frac{81}{256}\right) \times 0 + \frac{81}{256} \times (-5) = 5\left(\frac{49}{256} - \frac{81}{256}\right) < 0.$$

Puisque le gain algébrique moyen est strictement négatif, le jeu est défavorable au joueur.

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1) f est effectivement une similitude directe. Son rapport et son angle sont respectivement le module et un argument de $1+i\sqrt{3}$. Or

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

et donc f est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le centre de f est son point invariant. Or

$$(1+i\sqrt{3})(2i)+2\sqrt{3} = 2i-2\sqrt{3}+2\sqrt{3} = 2i.$$

et le point A est invariant par f. Finalement, f est la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

l'affirmation 1 est vraie.

2) $1991 = 284\times 7+3$ et donc $1991 \equiv 3 \quad (7)$ puis $1991^{2009} \equiv 3^{2009} \quad (7)$. Ensuite, puisque 7 est un nombre premier et que le nombre 3 n'est pas divisible par 7, le petit théorème de Fermat affirme que $3^6 \equiv 1 \quad (7)$.
(Si on ne connaît pas le petit théorème de Fermat, on doit écrire : $3^2 = 9$ et donc $3^2 \equiv 2 \quad (7)$. Puis, $3^3 \equiv 3\times 2 \quad (7)$ ou encore $3^3 \equiv -1 \quad (7)$ et donc $3^6 \equiv 1 \quad (7)$).

Maintenant, $2009 = 334\times 6+5$ et donc $3^{2009} = (3^6)^{334}\times 3^5$ puis $3^{2009} \equiv 3^5 \quad (7)$. Enfin $3^2 \equiv 2 \quad (7)$ puis $3^3 \equiv -1 \quad (7)$ puis $3^4 \equiv 4 \quad (7)$ et enfin $3^5 \equiv 5 \quad (7)$ et donc $1991^{2009} \equiv 5 \quad (7)$.

l'affirmation 2 est fausse.

3) Si $a \equiv b \quad (p)$, il existe un entier relatif k tel que $b-a = kp$. Mais alors $nb-na = (nk)p$ et donc $na \equiv nb \quad (p)$.
Réciproquement, supposons que $na \equiv nb \quad (p)$. Il existe un entier relatif k tel que $nb-na = kp$. Puisque les entiers naturels n et p sont premiers entre eux, le théorème de Bézout fournit deux entiers naturels u et v tels que $un+vp = 1$. On multiplie par u les deux membres de l'égalité $nb-na = kp$. On obtient $unb-una = ukp$ ou encore $(1-vp)b-(1-vp)a = ukp$ ou enfin $b-a = (vb-va+uk)p$, ce qui montre que $a \equiv b \quad (p)$.

L'affirmation 3 est vraie.

4) La translatée de $\mathscr{S}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(0,-3,0)$ est dans le plan (xOz). C'est la courbe d'équation $z = x^2+9$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$. Il s'agit d'une parabole et donc

l'affirmation 4 est fausse.

5) Soit $M(0,y,z)$ un point du plan (yOz). $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow y^2 = 3z^2$. Il n'existe pas d'entiers relatifs non nuls y et z tels que $y^2 = 3z^2$ car sinon $\sqrt{3} = \pm\frac{y}{z}$ et on en déduirait que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel ce qui n'est pas. Donc

L'affirmation 5 est vraie.

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

Partie A

1) Soient a un réel non nul et b un réel. On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^{at} - \dfrac{b}{a}$. Ici l'équation différentielle s'écrit $y' = -\dfrac{1}{2}y + 10$ et donc $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = 10$. Donc il existe un réel K tel que pour tout réel t, $f(t) = Ke^{-\frac{t}{2}} + 20$. La condition $f(0) = 220$ fournit $Ke^0 + 20 = 220$ et donc $K = 200$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t,\ f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20.}$$

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

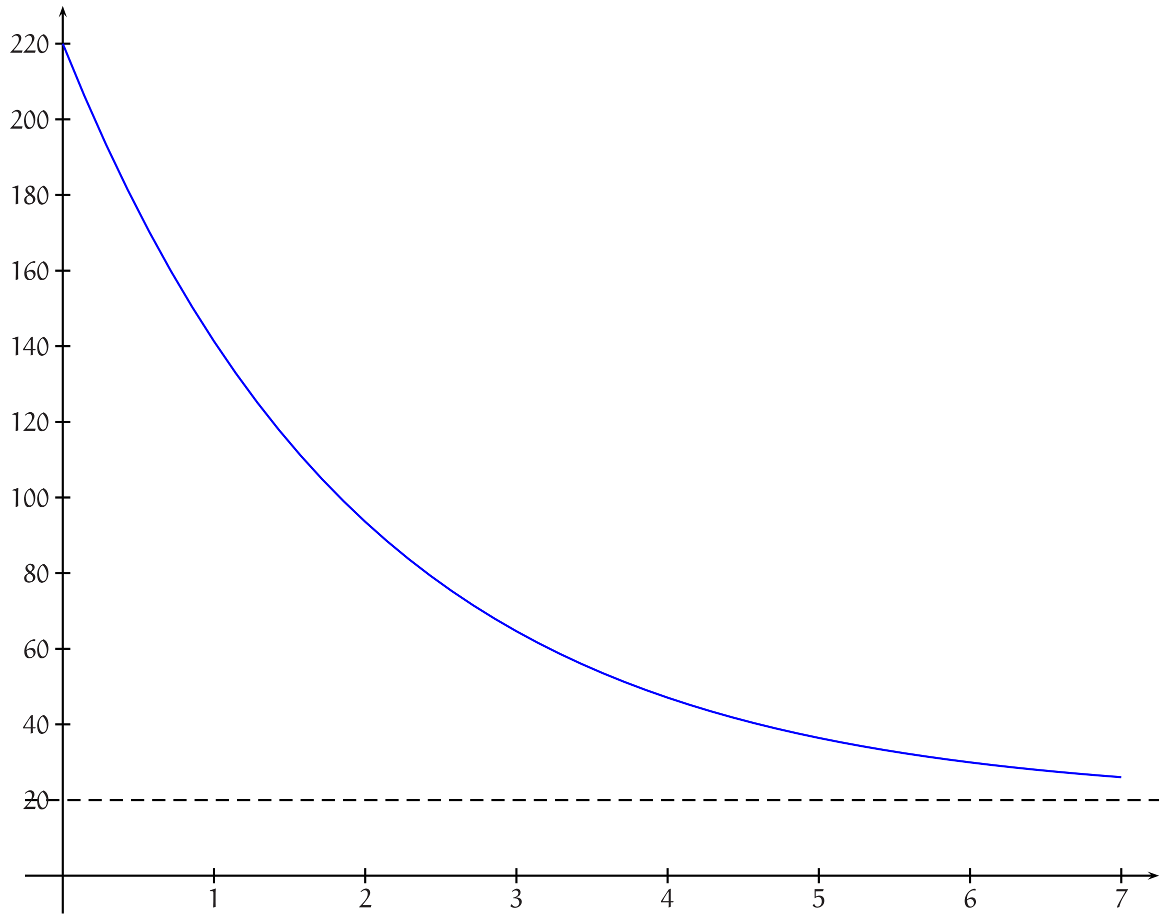
$$f'(t) = 200 \times \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right) = -100e^{-\frac{t}{2}}.$$

Pour tout réel t, $e^{-\frac{t}{2}} > 0$ et donc pour tout réel positif t, $f'(t) < 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[.}$$

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{2}} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$. On en déduit que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 20$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c) Graphique.



Partie B

1) a) $d_0 = f(0) - f(1) = 200(1 - e^{-1/2}) = 78,7$ arrondi au dixième. $d_1 = f(1) - f(2) = 200(e^{-1/2} - e^{-1}) = 47,7$ arrondi au dixième. $d_2 = f(2) - f(3) = 200(e^{-1} - e^{-3/2}) = 28,9$ arrondi au dixième.

b) Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 20$, $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 20 - 20 = 0$.

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

2) Pour tout entier naturel n, $d_n = (200e^{-n/2}+20)-(200e^{-(n+1)/2}+20) = 200(e^{-n/2}-e^{-(n+1)/2}) = 200(1-e^{-1/2})e^{-n/2}$.
Soit n un entier naturel.

$$d_n \leqslant 5 \Leftrightarrow 200(1-e^{-1/2})e^{-n/2} \leqslant 5 \Leftrightarrow 200(1-e^{-1/2}) \times \frac{1}{e^{n/2}} \leqslant 5 \Leftrightarrow 40(1-e^{-1/2}) \leqslant e^{n/2} \text{ (car } e^{n/2} > 0)$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{n/2}\right) \geqslant \ln\left(40(1-e^{-1/2})\right) \text{ (car la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur }]0,+\infty[)$$
$$\Leftrightarrow n \geqslant 2\ln\left(40(1-e^{-1/2})\right) \Leftrightarrow n \geqslant 5,5\ldots$$
$$\Leftrightarrow n \geqslant 6 \text{ (car } n \text{ est un entier naturel).}$$

La plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de la température est inférieur à 5°C est 6.

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

EXERCICE 4

1) a) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif x

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Pour tout réel positif x, $f'(x) \geqslant 0$ et donc la fonction f est croissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit que pour tout réel positif x, $f(x) \geqslant f(0)$ ou encore $x - \ln(1+x) \geqslant 0$ et donc

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } x,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul. $\ln(u_n) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Le réel $x = \frac{1}{n}$ est positif et d'après la question précédente, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel strictement positif n, on obtient $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$ ou encore $\ln(u_n) \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ \ln(u_n) \leqslant 1.}$$

c) Pour tout entier naturel non nul n, on a $\ln(u_n) \leqslant 1$ et donc par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{\ln(u_n)} \leqslant e^1$ ou encore

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n \leqslant e.$$

Si la suite (u_n) converge, sa limite ℓ vérifie $\ell \leqslant e$. On ne peut donc avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul. $v_n = \ln(u_n) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$ où $x = \frac{1}{n}$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Or quand n tend vers $+\infty$, $x = \frac{1}{n}$ tend vers 0 et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1.}$$

c) Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = e^{v_n}$. On en déduit que la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^1 = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.