# BACCALAUREAT GENERAL

## Session de juin 2009

## MATHEMATIQUES

## - Série S -

## Enseignement Obligatoire

## Liban

---

**EXERCICE 1**

**1)** b)

**2)** d)

**3)** d)

**Explications.**

**1)** $p(A) = \dfrac{3}{5}$ et donc $p(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - P(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B) \text{ (car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants)} \\ &= p(A) + (1 - p(A))p(B). \end{aligned}$$

Par suite,

$$p(B) = \frac{p(A \cup B) - p(A)}{1 - p(A)} = \frac{\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}}{\dfrac{3}{5}} = \frac{2/5}{3/5} = \frac{2}{3}.$$

La bonne réponse est la réponse b).

**2)**

$$\begin{aligned} p\,(X > 5) &= 1 - p\,(X \leqslant 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}\ dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5 = 1 - (-e^{-5\lambda} + e^0) = 1 + e^{-5\lambda} - 1 \\ &= e^{-5 \times 0,04} = e^{-0,2} = 0,818... \\ &= 0,82 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par excès.} \end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse d).

**3)** On note $P$ l'événement « ce soir, il pleut » et $C$ l'événement « ce soir, je sors mon chien ».
L'énoncé donne $p(P) = \dfrac{1}{4}$, $p_P(C) = \dfrac{1}{10}$ et $p_{\overline{P}}(C) = \dfrac{9}{10}$. La probabilité demandée est $p_C(\overline{P})$.

$$p_C(\overline{P}) = \frac{p(\overline{P} \cap C)}{p(C)} = \frac{p(\overline{P}) \times p_{\overline{P}}(C)}{p(C)} = \frac{(1 - p(P)) \times p_{\overline{P}}(C)}{p(C)}.$$

Il reste à calculer $p(C)$. D'après la formule des probabilités totales

$$p(C) = p(P \cap C) + p(\overline{P} \cap C) = p(P) \times p_P(C) + p(\overline{P}) \times p_{\overline{P}}(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{9}{10} = \frac{1}{40} + \frac{27}{40} = \frac{28}{40}.$$

Donc

$$p_C(\overline{P}) = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \times \dfrac{9}{10}}{\dfrac{28}{40}} = \frac{27/40}{28/40} = \frac{27}{28} \text{ et la bonne réponse est la réponse d).}$$

**EXERCICE 2**

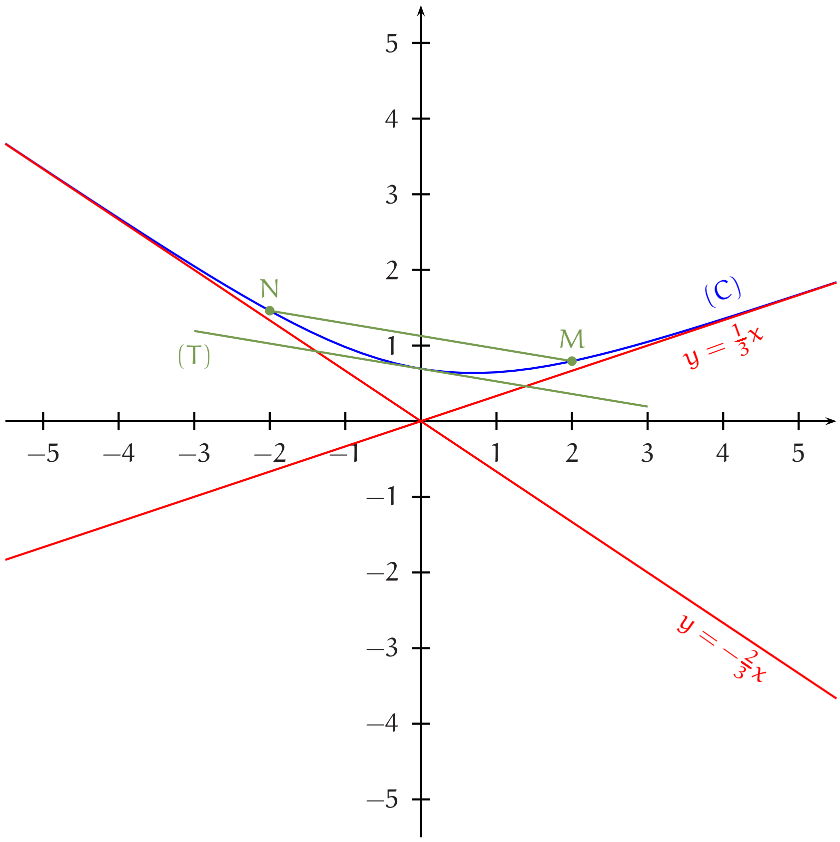
## Partie A

**1) a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln(1+0) = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

**b)** D'après la question a), $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{1}{3}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$. Par suite,

$$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y = \frac{1}{3}x \text{ est asymptote à la courbe } (C) \text{ en } +\infty.}$$




**c)** Pour tout réel $x$, $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1+e^{-x})$. Or, pour tout réel $x$, $e^{-x} > 0$ et donc $1+e^{-x} > 1$ puis, par stricte croissance de la fonction $y \mapsto \ln(y)$ sur $]0,+\infty[$, pour tout réel $x$, $\ln(1+e^{-x}) > \ln(1)$ ou encore

$$\text{pour tout réel } x,\ \ln(1+e^{-x}) > 0.$$

Ainsi, pour tout réel $x$, $f(x) - \frac{1}{3}x > 0$ et donc

$$\boxed{\text{la courbe } (C) \text{ est strictement au-dessus de la droite } (D) \text{ d'équation } y = \frac{1}{3}x \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

**d)** Soit $x$ un réel.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x = \ln(e^{-x}(e^x+1)) + \frac{1}{3}x = \ln(e^{-x}) + \ln(e^x+1) + \frac{1}{3}x = -x + \ln(e^x+1) + \frac{1}{3}x \\ &= \ln(e^x+1) - \frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = \ln(e^x+1) - \frac{2}{3}x.}$$

**e)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = \ln(0+1) = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{2}{3}x = +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

**2) a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{1}{3} = -\frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{3} = \frac{-3+1+e^x}{3(e^x+1)} = \frac{e^x-2}{3(e^x+1)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = \frac{e^x-2}{3(e^x+1)}.}$$

**b)** Pour tout réel $x$, $3(e^x+1) > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 2$. Or

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln(2) \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}\text{)},$$

et de même, $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln(2)$. On en déduit les variations de la fonction f :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(2)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $\infty$ | $\searrow$ | $\ln(3) - \frac{2}{3}\ln(2)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$\begin{aligned}
f(\ln(2)) &= \ln(1 + e^{-\ln(2)}) + \frac{\ln(2)}{3} \\
&= \ln\left(1 + \tfrac{1}{e^{\ln(2)}}\right) + \frac{\ln(2)}{3} \\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\ln(2)}{3} \\
&= \ln(3) - \ln(2) + \frac{\ln(2)}{3} \\
&= \ln(3) - \frac{2\ln(2)}{3}
\end{aligned}$$

## Partie B

**1)** D'après la question A.1)c), la courbe $(C)$ est au-dessus de la droite $(D)$ sur $[0, n]$ et donc

$$d_n = \int_0^n \left(f(x) - \frac{1}{3}x\right) dx = \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx.$$

**2)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour tout réel $x$ de $[0, n]$, $\ln(1+e^{-x}) \leqslant e^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$d_n \leqslant \int_0^n e^{-x}\, dx.$$

Or, $\displaystyle\int_0^n e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^n = -e^{-n} + e^0 = 1 - e^{-n}$ et puisque $e^{-n} > 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^n e^{-x}\, dx \leqslant 1$ puis que $d_n \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ d_n \leqslant 1.}$$

**3)** D'après la question précédente, la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée. Vérifions que la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Soit $n$ un entier naturel non nul. D'après la relation de Chasles

$$d_{n+1} - d_n = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx - \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx = \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx + \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx - \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx.$$

Maintenant, pour tout réel $x$ de $[n, n+1]$, $\ln(1+e^{-x}) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx \geqslant 0$ ou encore $d_{n+1} - d_n \geqslant 0$. On a ainsi montré que pour tout entier naturel non nul $n$, $d_{n+1} - d_n \geqslant 0$ et donc que la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

En résumé, la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (d_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente.}}$$

## Partie C

**1)** Le coefficient directeur de $(T)$ est $f'(0) = \dfrac{e^0 - 2}{3(e^0+1)} = \dfrac{1-2}{3(1+1)} = -\dfrac{1}{6}$.

**2)** Soit $x$ un réel non nul. Soient $M$ et $N$ les points de $(C)$ d'abscisses respectives $x$ et $-x$. D'après la question A.1)d)

$$\begin{aligned}
\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} &= \frac{1}{x-(-x)}\left(\left(\ln(1+e^{-x_M}) + \frac{1}{3}x_M\right) - \left(\ln(e^{x_N}+1) - \frac{2}{3}x_N\right)\right) \\
&= \frac{1}{2x}\left(\left(\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x\right) - \left(\ln(e^{-x}+1) + \frac{2}{3}x\right)\right) \\
&= \frac{1}{2x} \times \left(-\frac{1}{3}x\right) = -\frac{1}{6} = f'(0).
\end{aligned}$$

Ainsi, les droites $(T)$ et $(MN)$ ont mêmes coefficients directeurs et donc

les droites $(T)$ et $(MN)$ sont parallèles.

**EXERCICE 3**

**1) a)** Le point $E$ a pour coordonnées $(0, 0, 1)$. D'autre part, puisque $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, le point $F$ a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Les coordonnées du milieu I de $[EF]$ sont alors $\left(\dfrac{x_E + x_F}{2}, \dfrac{y_E + y_F}{2}, \dfrac{z_E + z_F}{2}\right)$ ou encore $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Le point $J$ est le symétrique du point $E$ par rapport au point $F$. Donc

- $\dfrac{x_E + x_J}{2} = x_F$ puis $x_J = 2x_F - x_E = 2 \times 1 - 0 = 2$.
- $\dfrac{y_E + y_J}{2} = y_F$ puis $y_J = 2y_F - y_E = 2 \times 0 - 0 = 0$.
- $\dfrac{z_E + z_J}{2} = z_F$ puis $z_J = 2z_F - z_E = 2 \times 1 - 1 = 1$.

Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$ et le point J a pour coordonnées $(2, 0, 1)$.

**b)** Le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et et le point J a pour coordonnées $(2, 0, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ a pour coordonnées $(x_J - x_D, y_J - y_D, z_J - z_D)$ ou encore $(2, -1, 1)$.

Puisque $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et et le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$.

Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et et le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites (BG) et (BI) sont deux droites sécantes du plan (BGI).

$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BG} = 2 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$ et $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BI} = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$.

Par suite, le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) et donc

Le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

**c)** Le plan (BGI) est le plan passant par $B(1, 0, 0)$ de vecteur normal $\overrightarrow{DJ}(2, -1, 1)$. Une équation cartésienne de ce plan est donc $2 \times (x - 1) - 1 \times (y - 0) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $2x - y + z - 2 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

**d)** La distance $d$ du point $F(1, 0, 1)$ au plan (BGI) d'équation $2x - y + z - 2 = 0$ est

$$d = \frac{|2 - 0 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

La distance du point $F$ au plan (BGI) est $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

**2) a)** La droite $(\Delta)$ est la droite passant par $F(1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DJ}(2, -1, 1)$. Donc

une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ est $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

**b)** Le point $A$ a pour coordonnées $(0, 0, 0)$ et le point $H$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Donc, le point $K$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_H}{2}, \dfrac{y_A + y_H}{2}, \dfrac{z_A + z_H}{2}\right)$ ou encore $\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Or, pour $t = -\dfrac{1}{2}$, on obtient $1 + 2t = 0$, $-t = \dfrac{1}{2}$ et $1 + t = \dfrac{1}{2}$. Donc,

Le centre $K$ de la face $ADHE$ appartient à la droite $(\Delta)$.

**c)** Soit $M(1+2t, -t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $(\Delta)$.

$$M \in (BGI) \Leftrightarrow 2(1+2t) - (-t) + (1+t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}.$$

Quand $t = -\frac{1}{6}$, on obtient $1 + 2t = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$ puis $-t = \frac{1}{6}$ et enfin $1 + t = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Donc

$$\boxed{\text{La droite } (\Delta) \text{ et le plan BGI sont sécants en le point } L\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right).}$$

**Remarque.** $FL = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ et on retrouve le résultat de la question 1)d).

**d)** $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{LI} = 0 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + 1 \times \left(0 - \frac{1}{6}\right) + 1 \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$. Donc le point $L$ est sur la hauteur issue de $B$ du triangle BGI.

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{LG} = -\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + 0 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1 \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0$. Donc le point $L$ est sur la hauteur issue de $G$ du triangle BGI.

Le point $L$ est sur deux des trois hauteurs du triangle BGI et donc

$$\boxed{\text{le point } L \text{ est l'orthocentre du triangle BGI.}}$$

**EXERCICE 4**

## Partie A

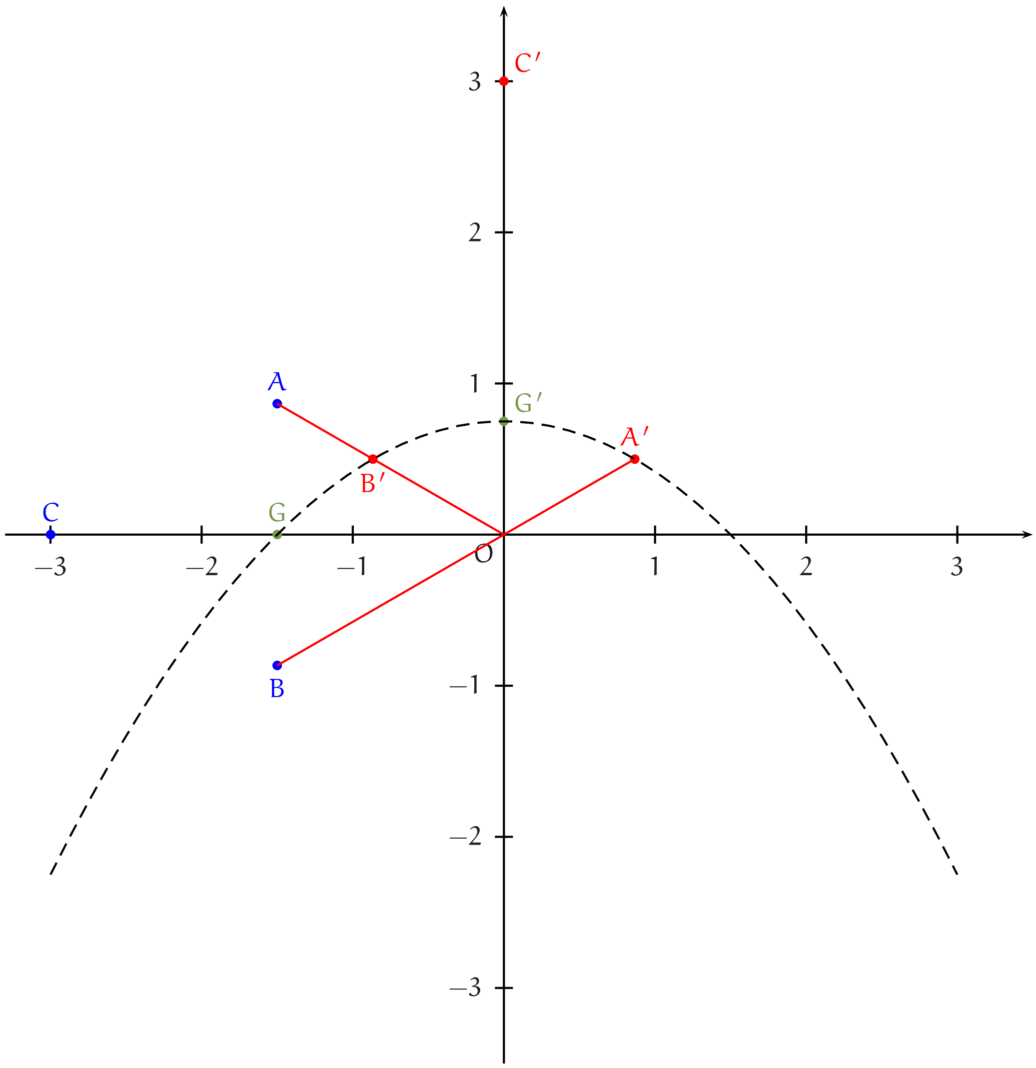
**1)** $z_A = \left|-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{12}{4}} = \sqrt{3}$ puis

$$z_A = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}e^{5i\pi/6}.$$

On sait d'autre part que $\overline{z_A}$ a le même module que $z_A$ et un argument opposé à celui de $z_A$ modulo $2\pi$. Donc $z_B = \overline{z_A} = \sqrt{3}e^{-5i\pi/6}$.

$$\boxed{z_A = \sqrt{3}e^{5i\pi/6} \text{ et } z_B = \sqrt{3}e^{-5i\pi/6}.}$$

**2)**




**3) 1ère solution.** • $AB = |z_B - z_A| = \left|\left(-\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}|-i| = \sqrt{3}.$

• $AC = |z_c - z_A| = \left|-3 - \left(-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{12}{4}} = \sqrt{3}.$

$CB = |z_B - z_C| = |\overline{z_A} - \overline{z_C}| = |\overline{z_A - z_C}| = |z_A - z_C| = AC = \sqrt{3}.$

Donc $AB = AC = BC$ et le triangle $ABC$ est équilatéral.

**2ème solution.**

$$\begin{aligned}\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} &= \frac{-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3}{-\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3} = \frac{\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}\\ &= \frac{3+2i\sqrt{3}-1}{3+1} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3}.\end{aligned}$$

Par suite, $\dfrac{CA}{CB} = \left|\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = |e^{i\pi/3}| = 1$ et $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg(e^{i\pi/3}) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.
En résumé, $CA = CB$ et $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et on a de nouveau montré que

le triangle $ABC$ est équilatéral.

## Partie B

**1) a)** • $z'_A = \dfrac{1}{3}i\left(\sqrt{3}e^{5i\pi/6}\right)^2 = \dfrac{1}{3}i \times 3e^{2\times\frac{5i\pi}{6}} = ie^{5i\pi/3} = e^{i\pi/2} \times e^{5i\pi/3} = e^{i\pi/2} \times e^{-i\pi/3} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\pi/6}$.

• $z'_B = \dfrac{1}{3}i\left(\sqrt{3}e^{-5i\pi/6}\right)^2 = e^{i\pi/2}e^{-5i\pi/3} = e^{-7i\pi/6} = e^{5i\pi/6}$.

• $z'_C = \dfrac{1}{3}i(-3)^2 = 3i = 3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{i\pi/2}$.

$z'_A = e^{i\pi/6}$, $z'_B = e^{5i\pi/6}$ et $z'_C = 3e^{i\pi/2}$.

**b)** Voir figure.

**c)** $\dfrac{z_A - z_O}{z_{B'} - z_O} = \dfrac{\sqrt{3}e^{5i\pi/6}}{e^{5i\pi/6}} = \sqrt{3}$. Par suite, $\left(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_O}{z_{B'} - z_O}\right) = 0$ $(2\pi)$ et donc les points $O$, $A$ et $B'$ sont alignés.

$\dfrac{z_{A'} - z_O}{z_B - z_O} = \dfrac{e^{i\pi/6}}{\sqrt{3}e^{-5i\pi/6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Par suite, $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA'}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_O}{z_{B'} - z_O}\right) = \pi$ $(2\pi)$ et donc les points $O$, $B$ et $A'$ sont alignés.

**2) a)** $z_G = \dfrac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4} = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$.

$z_{G'} = \dfrac{1}{3}i\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}i$.

**b)** L'affixe du barycentre des points $O' = O$, $A'$, $B'$ et $C'$ est

$$\frac{z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 3i\right) = i \neq z_{G'}.$$

Ainsi, le point $G'$ n'est pas l'isobarycentre des points $O'$, $A'$, $B'$ et $C'$.

**3)** Soit $z$ un nombre complexe. On pose $z = a + ib$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

$$z' = \frac{1}{3}i(a+ib)^2 = \frac{1}{3}i(a^2 + 2iab - b^2) = \frac{1}{3}(-2ab + i(a^2 - b^2)).$$

La droite $(AB)$ est la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$. Soit $M\left(-\dfrac{3}{2}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $(AB)$. Notons $x$ et $y$ les coordonnées de $M'$. D'après le calcul précédent

$$x = \frac{1}{3}\left(-2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times t\right) = t \text{ et } y = \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - t^2\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2,$$

et donc $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$.

Si $M$ appartient à la droite $(AB)$ alors $M'$ appartient à la parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$.