

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

France métropolitaine

EXERCICE 1

1) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) On sait alors que pour tout entier naturel n

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Or $v_0 = u_0 - 6 = -5$ et donc pour tout entier naturel n on a

$$u_n = v_n + 6 = -5 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6.$$

Pour tout entier naturel n , $u_n = -5 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c) Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. On en déduit que la suite (u_n) converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6.$$

2) a) $10w_{10} = 11w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$ et donc $w_{10} = \frac{210}{10} = 21$.

$$w_{10} = 21.$$

b) Il semblerait que pour tout entier naturel n , on ait $w_n = 2n + 1$. Prouvons-le par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a $2 \times 0 + 1 = 1 = w_0$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $w_{n-1} = 2(n-1) + 1$ ou encore $w_{n-1} = 2n - 1$.

$$w_n = \frac{(n+1)w_{n-1} + 1}{n} = \frac{(n+1)(2n-1) + 1}{n} = \frac{2n^2 + n}{n} = 2n + 1.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , on ait $w_n = 2n + 1$. En particulier

la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2 et $w_{2009} = 4019$.

Si on n'aime pas passer de $n-1$ à n et que l'on préfère passer de n à $n+1$, on doit commencer par se réécrire la relation de récurrence : pour tout entier naturel $n \geq 0$, $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 1$. La démonstration principale s'écrit alors

$$w_{n+1} = \frac{(n+2)w_n + 1}{n+1} = \frac{(n+2)(2n+1) + 1}{n+1} = \frac{2n^2 + 5n + 3}{n+1} = \frac{(n+1)(2n+3)}{n+1} = 2n+3 = 2(n+1) + 1.$$

EXERCICE 2

PARTIE I

1) D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0.$$

Puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + x e^{-x}) = \ln(1 + 0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2) La fonction $x \mapsto 1 + x e^{-x}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et est strictement positive sur cet intervalle et la fonction $y \mapsto \ln y$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{(1 + x e^{-x})'}{1 + x e^{-x}} = \frac{1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})}{1 + x e^{-x}} = \frac{(1 - x)e^{-x}}{1 + x e^{-x}}.$$

Maintenant, pour tout réel positif x , $\frac{e^{-x}}{1 + x e^{-x}} > 0$. On en déduit que pour tout réel positif x , $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

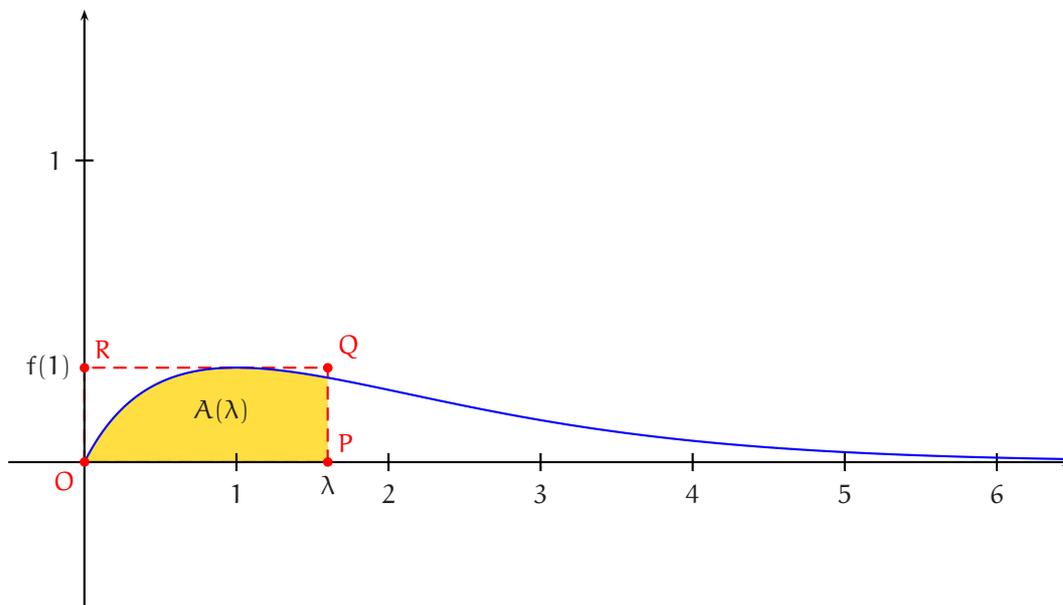
3) On en déduit le tableau de variations de f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\ln(1 + e^{-1})$	0

PARTIE II

1) Première méthode.

a) Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est continue et positive sur $[0, \lambda]$. Donc $A(\lambda)$ est l'aire exprimée en unités d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.



b) Puisque la fonction f admet un maximum en 1 d'après la question I.3), le domaine considéré est contenu dans le rectangle $OPQR$ où $P(\lambda, 0)$, $Q(\lambda, f(1))$ et $R(0, f(1))$. Son aire $A(\lambda)$ est donc inférieure ou égale à l'aire de ce rectangle ou encore $A(\lambda) \leq \lambda f(1)$.

Pour tout réel strictement positif λ , $A(\lambda) \leq \lambda f(1)$.

2) Deuxième méthode.

a) Pour x dans $[0, \lambda]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, \lambda]$ et pour x dans $[0, \lambda]$ on a

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v(x) &= -e^{-x} \\ u'(x) &= 1 & v'(x) &= e^{-x} \end{aligned}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, \lambda]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda x e^{-x} dx &= [x \times (-e^{-x})]_0^\lambda - \int_0^\lambda 1 \times (-e^{-x}) dx = -\lambda e^{-\lambda} + 0 - [e^{-x}]_0^\lambda \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1. \end{aligned}$$

Pour tout réel λ , $\int_0^\lambda x e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$.

b) Soit λ un réel strictement positif. Pour tout réel x de $[0, \lambda]$, le réel $u = x e^{-x}$ est positif. On en déduit que pour tout réel x de $[0, \lambda]$, $\ln(1 + x e^{-x}) \leq x e^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient alors

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda \ln(1 + x e^{-x}) dx \leq \int_0^\lambda x e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.$$

Pour tout réel strictement positif λ , $A(\lambda) \leq -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$.

3) **Application numérique.** Quand $\lambda = 5$, la majoration de la question 1)b) fournit $A(5) \leq 5 \ln(1 + e^{-1}) = 1,566\dots$ et donc

$$A(5) \leq 1,57.$$

La majoration de la question 2)b) fournit quant à elle $A(5) \leq -5e^{-5} - e^{-5} + 1 = 0,959\dots$ et donc

$$A(5) \leq 0,96.$$

Dans le cas où $\lambda = 5$, la méthode de la question 2) fournit un meilleur majorant que la méthode de la question 1).

EXERCICE 3

PARTIE I Restitution organisée de connaissances

Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!((n-1)-p)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)! \times (n-p) \times (n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{p \times (p-1)! \times (n-p-1)!} \\ &= \frac{p \times (n-1)!}{p \times (p-1)! \times (n-p) \times (n-p-1)!} + \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p \times (p-1)! \times (n-p) \times (n-p-1)!} \\ &= \frac{p \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} + \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} = \frac{p \times (n-1)! + (n-p) \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} \\ &= \frac{(p+n-p) \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = \binom{n}{p}. \end{aligned}$$

Pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

PARTIE II

1) a) Les différents tirages de deux jetons sont supposés équiprobables. Le nombre de cas possibles est le nombre de façons de tirer simultanément deux jetons parmi dix jetons. Il y en a

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

Le nombre de cas favorables est le nombre de façons de tirer simultanément les deux jetons parmi les sept jetons blancs. Il y en a

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21.$$

On en déduit que

$$p(A) = \frac{21}{45} = \frac{3 \times 7}{3 \times 15} = \frac{7}{15}.$$

b) Il y a toujours 45 cas possibles. D'autre part, il y a 4 jetons blancs portant un numéro impair (1, 3, 5 et 7) et 2 jetons noirs portant un numéro impair (1 et 3) et donc 6 jetons portant un numéro impair. Le nombre de cas favorables est le nombre de façons de tirer simultanément les deux jetons parmi les six jetons portant un numéro impair. Il y en a

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

On en déduit que

$$p(B) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

c) $p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$. D'autre part, l'événement $A \cap B$ est l'événement « obtenir deux jetons blancs portant des numéros impairs ». Il y a 4 jetons blancs portant des numéros impairs et donc $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ tirages de deux jetons blancs portant des numéros impairs. On en déduit que

$$p(A \cap B) = \frac{6}{45}.$$

Comme $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$, on a montré que

les événements A et B ne sont pas indépendants.

2) a) X prend trois valeurs : 0, 1 et 2.

$$\bullet p(X=0) = \frac{\binom{7}{0} \times \binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1 \times 3}{45} = \frac{1}{15}.$$

$$\bullet p(X=1) = \frac{\binom{7}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{7 \times 3}{45} = \frac{7}{15}.$$

$$\bullet p(X=2) = \frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

$$p(X=0) = \frac{1}{15}, p(X=1) = \frac{7}{15} \text{ et } p(X=2) = \frac{7}{15}.$$

$$\text{b) } E(X) = 0 \times p(X=0) + 1 \times p(X=1) + 2 \times p(X=2) = \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = \frac{3 \times 7}{15} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

$$E(X) = 1,4.$$

EXERCICE 4

1) a) Soit M un point distinct de O dont l'affixe est notée z .

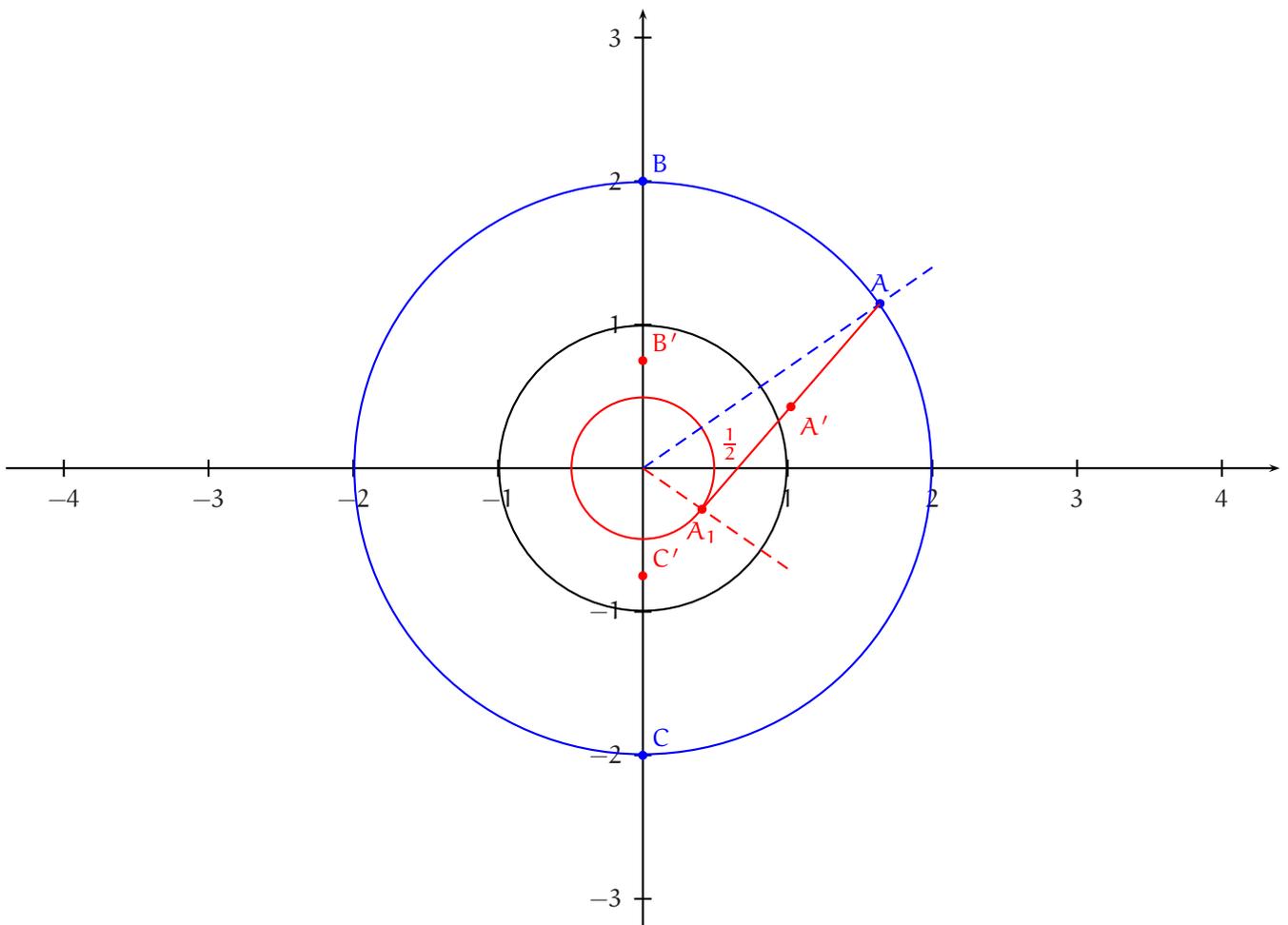
$$OM \times OM_1 = |z| \times \left| \frac{1}{z} \right| = |z| \times \frac{1}{|z|} = 1,$$

et

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1} \right) = \arg(z_{M_1}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM} \right) \quad [2\pi].$$

Pour tout point $M \neq O$, $OM \times OM_1 = 1$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1} \right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM} \right) \quad [2\pi]$.

b) Le point A_1 est défini par $OA_1 = \frac{1}{OA} = \frac{1}{2}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_1} \right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA} \right) \quad [2\pi]$. Ces égalités permettent de construire le point A_1 et enfin le point A' est le milieu du segment $[AA_1]$.



2) a) Soit M un point distinct de O .

$$z' = z_{M'} = \frac{1}{2}(z_M + z_{M_1}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

b)

$$z_{B'} = \frac{1}{2}\left(z_B + \frac{1}{z_B}\right) = \frac{1}{2}\left(2i + \frac{1}{2i}\right) = \frac{(2i)^2 + 1}{4i} = \frac{-4 + 1}{4i} = \frac{-3}{4i} = \frac{-3 \times (-i)}{4i \times (-i)} = \frac{3i}{4},$$

et

$$z_{C'} = \frac{1}{2}\left(z_C + \frac{1}{z_C}\right) = \frac{1}{2}\left(-2i + \frac{1}{-2i}\right) = \frac{(-2i)^2 + 1}{-4i} = \frac{-3}{-4i} = \frac{3i}{4}.$$

$$z_{B'} = \frac{3i}{4} \text{ et } z_{C'} = -\frac{3i}{4}.$$

3) Soit M un point distinct de O .

$$M' = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = z \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 2z \Leftrightarrow \frac{1}{z} = z \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1.$$

Les points M tels que $M' = M$ sont les points de coordonnées $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

4) Soit M un point distinct de O dont l'affixe est notée z .

1ère solution. Si M est sur le cercle de centre O et de rayon 1, on a $|z| = 1$ et donc il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$.
Mais alors

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2} \left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} \right) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} (\cos \theta + i \sin \theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta) = \cos \theta. \end{aligned}$$

Ainsi, z' est un réel élément de l'intervalle $[-1, 1]$ et donc M' est élément du segment $[KL]$.

2ème solution. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels tels que $x^2 + y^2 = 1$ (car $OM^2 = 1$).

$$z' = \frac{1}{2} \left(x + iy + \frac{1}{x + iy} \right) = \frac{1}{2} \left(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{2} (x + iy + x - iy) = x.$$

Or $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ et on retrouve le fait que z' est un réel élément de l'intervalle $[-1, 1]$.