BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Centres étrangers

EXERCICE 1

1) Restitution organisée de connaissances

a) Les événements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ constituent une partition de l'événement B. La formule des probabilités totales fournit alors

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}).$$

b) Supposons maintenant les événements A et B indépendants.

$$\begin{aligned} p(B \cap \overline{A}) &= p(B) - p(B \cap A) \text{ (d'après a))} \\ &= p(B) - p(B) \times p(A) \text{ (car les événements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants)} \\ &= p(B)(1 - p(A)) = p(B) \times p(\overline{A}). \end{aligned}$$

Ceci montre que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

2) Application.

a) La probabilité demandée est $p(\overline{R} \cap S)$. Puisque les événements R et S sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{R}$ et S d'après 1)b). Donc

$$p(\overline{R} \cap S) = p(\overline{R}) \times p(S) = (1 - 0,1) \times 0,05 = 0,045.$$

La probabilité que Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne est $0,045$.

b) Stéphane arrive à l'heure si et seulement si il entend son réveil sonner et son scooter ne tombe pas en panne. La probabilité demandée est donc $p(\overline{R} \cap \overline{S})$. Puisque les événements $\overline{R}$ et S sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{R}$ et $\overline{S}$. Donc

$$p(\overline{R} \cap \overline{S}) = p(\overline{R}) \times p(\overline{S}) = 0,9 \times 0,95 = 0,855.$$

La probabilité que Stéphane soit à l'heure un jour de classe donné est $0,855$.

c) Notons X le nombre de fois où Stéphane entend le réveil sonner. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « Stéphane entend le réveil sonner » avec une probabilité $p = p(\overline{R}) = 0,9$ et « Stéphane n'entend pas le réveil sonner » avec une probabilité $1 - p = p(R) = 0,1$.

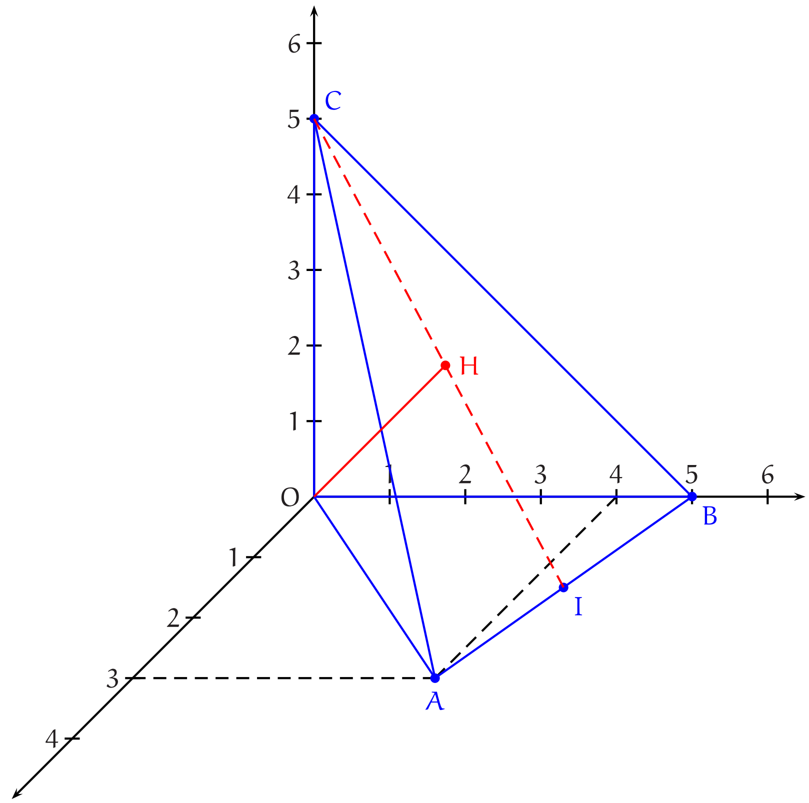
La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,9$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 4)$ et on a

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 4) &= p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4} \times 0,9^4 \times 0,1^1 + 0,9^5 = 5 \times 0,9^4 \times 0,1 + 0,9^5 \\ &= 0,9185 \text{ arrondi à la quatrième décimale.} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

1)



2) • $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 = OC$ et donc le triangle OAC est isocèle en O.
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 3 \times 0 + 4 \times 0 + 0 \times 5 = 0$ et donc le triangle OAC est rectangle en O.
• $OB = OC = 5$ et $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$. Donc le triangle OBC est rectangle et isocèle en O.
• On en déduit que $AC = BC = OC\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ et le triangle ABC est isocèle en C.
D'autre part, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.
Comme $\sqrt{10} \neq 5\sqrt{2}$, le triangle ABC n'est pas équilatéral.
Comme $AC\sqrt{2} = 10 \neq \sqrt{10} = AB$, le triangle ABC n'est pas isocèle rectangle.

3) a) Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ ou encore $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{CI}$ a pour coordonnées $(x_I - x_C, y_I - y_C, z_I - z_C)$ ou encore $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -5\right)$. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{CH}$ a pour coordonnées $\left(\frac{15}{19}, \frac{45}{19}, -\frac{50}{19}\right)$. On en déduit que $\overrightarrow{CI} = \frac{19}{5 \times 2}\overrightarrow{CH}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires et donc

les points H, C et I sont alignés.

b) Les points C et I sont dans le plan (ABC). On en déduit que la droite (CI) est contenue dans le plan (ABC). Puisque le point H appartient à la droite (CI), le point H est dans le plan ABC. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{OH}$ a pour coordonnées $\left(\frac{15}{19}, \frac{45}{19}, \frac{45}{19}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(0, -5, 5)$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 0)$. Donc

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} = \frac{15}{19} \times 0 + \frac{45}{19} \times (-5) + \frac{45}{19} \times 5 = 0 \text{ et } \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = \frac{15}{19} \times (-3) + \frac{45}{19} \times 1 + \frac{45}{19} \times 0 = 0.$$

Ainsi, la droite (OH) est orthogonale aux droites (BC) et (BA) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC). On en déduit que la droite (OH) est perpendiculaire au plan (ABC).

En résumé, le point H est dans le plan (ABC) et la droite (OH) est perpendiculaire au plan (ABC). Ceci montre que

le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

c) Le plan (ABC) est le plan passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{OH}$.
Une équation de ce plan est $\frac{15}{19}(x-0)+\frac{45}{19}(y-5)+\frac{45}{19}(z-0)=0$ ou encore $x+3(y-5)+3z=0$ ou enfin $x+3y+3z=15$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (ABC) \text{ est } x+3y+3z=15.}$$

4) Calculs d'aire et de volume.

a) La distance du point A au segment $[OB]$ est $x_A=3$ et donc l'aire du triangle OAB est $\frac{3\times 5}{2}=\frac{15}{2}$.
Puisque la droite (OC) est perpendiculaire au plan (OAB), le volume du tétraèdre $OABC$ est

$$\frac{\text{aire}(OAB)\times OC}{3}=\frac{(15/2)\times 5}{3}=\frac{75}{6}.$$

$$\boxed{\text{Le volume du tétraèdre } OABC \text{ est } V=\frac{75}{6}.}$$

b) 1ère solution. Puisque le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC), la distance de O au plan (ABC) est la distance OH avec

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{\left(\frac{15}{19}\times 1\right)^2+\left(\frac{15}{19}\times 3\right)^2+\left(\frac{15}{19}\times 3\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{15}{19}\right)^2(1^2+3^2+3^2)}=\frac{15}{19}\sqrt{1^2+3^2+3^2}\\ &=\frac{15\sqrt{19}}{19}=\frac{15}{\sqrt{19}}.\end{aligned}$$

2ème solution. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $x+3y+3z-15=0$ et donc la distance du point O au plan (ABC) est

$$\frac{|0+0+0-15|}{\sqrt{1^2+3^2+3^2}}=\frac{15}{\sqrt{19}}.$$

$$\boxed{\text{La distance du point } O \text{ au plan } (ABC) \text{ est } d=\frac{15}{\sqrt{19}}.}$$

c) On sait que $V=\frac{\text{aire}(ABC)\times d}{3}$ et donc

$$\text{aire}(ABC)=\frac{3V}{d}=\frac{\frac{75}{6}\times 3}{\frac{15}{\sqrt{19}}}=\frac{5\times 15\times 3}{2\times 3}\times\frac{\sqrt{19}}{15}=\frac{5\sqrt{19}}{2}.$$

$$\boxed{\text{L'aire du triangle } ABC \text{ est } \frac{5\sqrt{19}}{2}.}$$

EXERCICE 3

1)	**Faux**
2)	**Vrai**
3)	**Vrai**
4)	**Vrai**

Justifications.

1) $\text{Re}(i^2) = \text{Re}(-1) = -1$ et $(\text{Re}(i))^2 = 0^2 = 0$. Donc $\text{Re}(i^2) \neq (\text{Re}(i))^2$ et la proposition 1 est fausse.

2) $OM = |z|$, $ON = |\overline{z}|$ et $OP = \left|\dfrac{z^2}{\overline{z}}\right|$. On sait que $|\overline{z}| = |z|$ et donc $OM = ON$. D'autre part, $OP = \dfrac{|z|^2}{|\overline{z}|} = \dfrac{|z|^2}{|z|} = |z| = OM$. Finalement $OM = ON = OP$ et la réponse 2 est vraie.

3) 1ère solution. Soient M, A et B les points affixes respectives z, $-i$ et i.

$$\begin{aligned}|1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |i(-i+z)| = |-i(i+z)| \Leftrightarrow |i| \times |z-i| = |-i| \times |z+i| \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Leftrightarrow MA = MB\\ &\Leftrightarrow M \in \text{med}[AB] \Leftrightarrow M \in (Ox) \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0.\end{aligned}$$

2ème solution. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}|1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |1+i(x+iy)| = |1-i(x+iy)| \Leftrightarrow |(1-y)+ix| = |(1+y)-ix|\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2} = \sqrt{(1+y)^2+(-x)^2} \Leftrightarrow (1-y)^2+x^2 = (1+y)^2+x^2\\ &\Leftrightarrow 1-2y+y^2 = 1+2y+y^2 \Leftrightarrow 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0.\end{aligned}$$

La proposition 3 est vraie.

4) 1ère solution. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont quatre réels.

$$\begin{aligned}|z+z'| = |z-z'| &\Leftrightarrow \sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\\ &\Leftrightarrow x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2 = x^2-2xx'+x'^2+y^2-2yy'+y'^2\\ &\Leftrightarrow 4(xx'+yy') = 0 \Leftrightarrow xx'+yy' = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0\\ &\Leftrightarrow (OM)\perp(OM').\end{aligned}$$

2ème solution. Soit N le point tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. Le quadrilatère $OMNM'$ est un parallélogramme.

$|z+z'| = \|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = ON$ et $|z-z'| = \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{M'M}\| = M'M$.
Donc si $|z+z'| = |z-z'|$ alors $ON = MM'$ et les diagonales du parallélogramme $OMNM'$ ont même longueur. On sait alors que ce parallélogramme est un rectangle et donc que $(OM)\perp(OM')$. La réponse 4 est vraie.

EXERCICE 4

Partie A - Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$.

1) Soit n un entier naturel. $f_n(0) = \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{2}$ et donc le point A de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

Pour tout entier naturel n, le point A de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

2) Etude de la fonction f_0.

a) Pour tout réel x, $f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$. Pour tout réel x, $1+e^{-x} > 0$ et donc f_0 est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f_0'(x) = -\frac{0-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

On en déduit que pour tout réel x, $f_0'(x) > 0$ et donc que

la fonction f_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{-x} = +\infty$ et donc

$$\lim_{x\to-\infty} f_0(x) = 0.$$

Limite en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

c) Tableau de variation de la fonction f_0.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	
f_0	0	$\nearrow$	1

3) Etude de la fonction f_1.

a) Soit x un réel.

$$f_1(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{1}{1+e^{-x}} = f_0(x).$$

Pour tout réel x, $f_0(x) = f_1(-x)$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_0(-x) = \lim\limits_{X\to+\infty} f_0(X) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_0(-x) = \lim\limits_{X\to-\infty} f_0(X) = 0$.

Etudions maintenant les variations de la fonction f_1.

1ère solution. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f_1'(x) = (f_0(-x))' = -f_0'(-x).$$

Puisque pour tout réel x, $f_0'(-x) > 0$, on en déduit que pour tout réel x, $f_1'(x) < 0$ et donc que la fonction f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2ème solution. La fonction $g : x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $f_0 : y \mapsto f_0(y)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $f_1 = f_0 \circ h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) Pour tout réel x, le point de $\mathscr{C}_0$ d'abscisse x a même ordonnée que le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse $-x$. Ceci signifie que

Les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4) Etude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$.

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel x,

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{e^{nx}(1+e^{-x})} = \frac{1}{e^{nx}+e^{nx-x}} = \frac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}.$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• Puisque $n > 0$ et $n-1 > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{nx} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{(n-1)x} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{nx}+e^{(n-1)x}) = 0$. Comme de plus, pour tout réel x, $e^{nx}+e^{(n-1)x} > 0$, on a montré que

pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$.

• Puisque $n > 0$ et $n-1 > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{nx} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(n-1)x} = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{nx}+e^{(n-1)x}) = +\infty$ et donc

pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout réel x

$$f_n'(x) = -\frac{ne^{nx}+(n-1)e^{(n-1)x}}{(e^{nx}+e^{(n-1)x})^2}.$$

Or, $n > 0$, $n-1 > 0$ et pour tout réel x, $e^{nx} > 0$, $e^{(n-1)} > 0$ et $\left(e^{nx}+e^{(n-1)x}\right)^2 > 0$. Par suite, pour tout réel x, $f_n'(x) < 0$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f_n.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	
f_n	$+\infty$	0

Partie B - Etude d'une suite liée aux fonctions f_n.

1) La fonction $x \mapsto \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+e^{-x}$. Une primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln(1+e^{-x})$. Par suite,

$$u_1 = \int_0^1 -\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^0) = \ln(2) - \ln(1+e^{-1}).$$

Ensuite,

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1\times 1 = 1,$$

et donc

$$u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln(2) + \ln(1+e^{-1}).$$

$u_0 = 1 - \ln(2) + \ln(1+e^{-1})$ et $u_1 = \ln(2) - \ln(1+e^{-1})$.

2) Soit n un entier naturel.

Soit x un réel de $[0,1]$, $1+e^{-x} \geqslant 1 > 0$ et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1+e^{-x}} \leqslant 1$. On multiplie alors les trois membres de cet encadrement par le réel positif e^{-nx} et on obtient

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0,1],\ 0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+e^{-nx}} \leqslant e^{-nx}.$$

Par positivité et croissance de l'intégration, on en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx.}$$

3) Soit n un entier naturel non nul.

$$\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \int_0^1 -\frac{1}{n} \times (-ne^{-nx})\,dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}e^0 = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

Maintenant, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-e^{-n}}{n} = 0$. En tenant compte de l'encadrement de la question 2), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

