BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

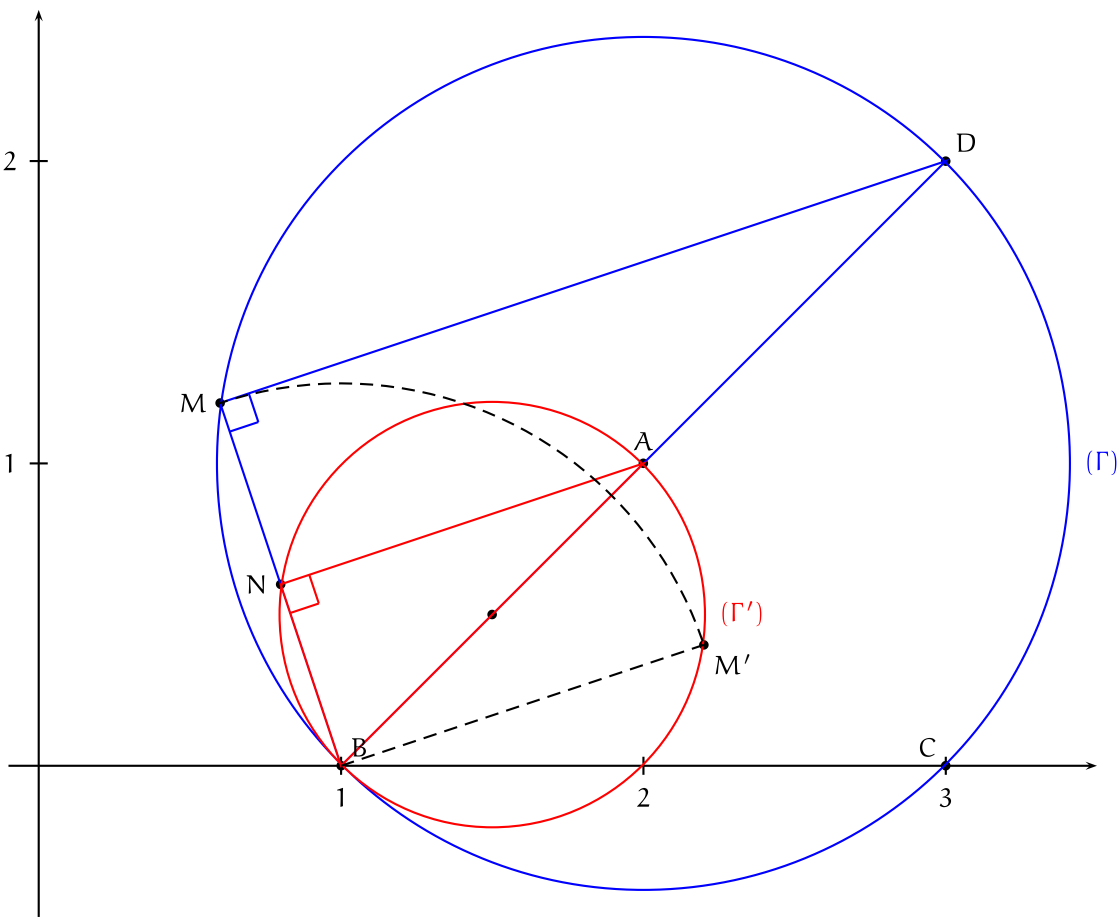
- Série S -

Enseignement de Spécialité

Rochambeau

EXERCICE 1

1.



2. a) Une équation du cercle (Γ) est $(x-2)^2+(y-1)^2=2$. Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$M \in (O,\overrightarrow{u}) \cap (\Gamma) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ (x-2)^2+(0-1)^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ (x-2)^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x-2=1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x-2=-1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=3 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Les points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O,\overrightarrow{u})$ sont les points B et C d'affixes $z_B=1$ et $z_C=3$.

b) D est le symétrique de B par rapport à A et donc $\dfrac{z_B+z_D}{2}=z_A$ ou encore $z_D=2z_A-z_B=2(2+i)-1=3+2i$.

$$\boxed{z_D=3+2i.}$$

3. a)

$$\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \frac{(3+2i) - (\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i)}{1 - (\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i)} = \frac{\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i}{\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i} = \frac{6+2i}{1-3i} = \frac{2i(1-3i)}{1-3i} = 2i.$$

$$\boxed{\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = 2i.}$$

b) Puisque $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} \neq 0$, on sait que $\arg\left(\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right)$. On en déduit que

$$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Ainsi, le triangle BMD est rectangle en M. M est appartient donc au cercle de diamètre $[BD]$ c'est-à-dire au cercle (Γ).

$$\boxed{\text{Le point } M \text{ appartient au cercle } (\Gamma).}$$

4. a) Le point N est sur le cercle (Γ') et donc la droite (AN) est perpendiculaire à la droite (MB) de même que la droite (DM). On en déduit que

$$\boxed{\text{les droites } (DM) \text{ et } (AN) \text{ sont parallèles.}}$$

b) Dans le triangle MBD, le point A est le milieu du côté $[BD]$ et puisque la droite (AN) est parallèle au côté $[DM]$, on en déduit que N est le milieu du segment $[BM]$. Mais alors,

$$z_N = \frac{z_M + z_B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i + 1\right) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

$$\boxed{z_N = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.}$$

5. a) L'expression complexe de la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est $z' = e^{-i\pi/2}(z - z_B) + z_B$ ou encore $z' = -i(z-1) + 1$ ou enfin $z' = -iz + 1 + i$. Par suite,

$$z_{M'} = -i\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i\right) + 1 + i = -\frac{3}{5}i + \frac{6}{5} + 1 + i = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i.$$

$$\boxed{z_{M'} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i.}$$

b) On a $A(2,1)$, $B(1,0)$ et $M'\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ et donc $\overrightarrow{M'A}\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ et $\overrightarrow{M'B}\left(-\dfrac{6}{5}, -\dfrac{2}{5}\right)$ puis

$$\overrightarrow{M'A}.\overrightarrow{M'B} = \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{6}{5}\right) + \frac{3}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{25} - \frac{6}{25} = 0.$$

Ainsi, le triangle $AM'B$ est rectangle en M' et donc le point M' appartient au cercle de diamètre $[AB]$ c'est-à-dire au cercle (Γ').

$$\boxed{\text{Le point } M' \text{ appartient au cercle } (\Gamma').}$$

EXERCICE 2

1. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Le symétrique de M par rapport au plan (xOy) est le point M' de coordonnées $(x, y, -z)$. Donc

$$M \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (-z)^2 = 1 \Leftrightarrow M' \in (S).$$

Ceci montre que

$$\boxed{\text{la surface } (S) \text{ est symétrique par rapport au plan } (xOy).}$$

2. a) La droite (AB) est la droite passant par $A(3, 1, -3)$ et de vecteur directeur $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}(-1, 0, 1)$. Par suite,

$$\boxed{\text{une représentation paramétrique de la droite } (AB) \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 1 \\ z = -3 + t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

b) Soit $M(3 - t, 1, -3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la surface (S).

$$(3 - t)^2 + 1^2 - (-3 + t)^2 = (3 - t)^2 + 1 - (3 - t)^2 = 1.$$

Ainsi, tout point de la droite (D) appartient à la surface (S) ou encore

$$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ est incluse dans la surface } (S).}$$

3. Soient k un réel puis (P) le plan d'équation $z = k$. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P) \cap (S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = k \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = k \\ x^2 + y^2 = 1 + k^2 \end{array}\right..$$

On reconnaît alors un système d'équations d'un cercle centré sur l'axe (Oz) et de rayon $\sqrt{1 + k^2}$.

$$\boxed{\text{la section de la surface } (S) \text{ par un plan parallèle au plan } (xOy) \text{ est un cercle.}}$$

Ceci montre que (S) est une surface de révolution d'axe (Oz).

4. a) En particulier, quand $k = 68$, on obtient le cercle de rayon $\sqrt{1 + 68^2} = \sqrt{4625}$, de centre $\Omega(0, 0, 68)$ contenu dans le plan d'équation $z = 68$.

b) Soient (a, b) un couple d'entiers naturels solution du système (1). Notons m le ppcm de a et b et d le pgcd de a et b. d est un diviseur de m et donc un diviseur de 440. Mais d est aussi un diviseur de a et donc de a^2 et aussi de b et donc de b^2 et finalement de $a^2 + b^2$ qui est égal à 4625. En résumé, d est un diviseur commun à 440 et 4625 et donc un diviseur du pgcd de 440 et 4625.
Or, les décompositions primaires de ces deux entiers sont respectivement $440 = 2^3 \times 5 \times 11$ et $4625 = 5^3 \times 37$. On en déduit que $\text{pgcd}(440, 4625) = 5$ et donc que d est égal à 1 ou 5.

1er cas : $d = 1$. On sait que $ab = md = 440$. a et b sont donc solutions du système $\left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 4625 \\ ab = 440 \end{array}\right.$. Or

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 4625 \\ ab = 440 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a + b)^2 - 2ab = 4625 \\ ab = 440 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a + b)^2 = 5505 \\ ab = 440 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = \sqrt{5505} \\ ab = 440 \end{array}\right..$$

Comme $\sqrt{5505}$ n'est pas un entier, ce système n'a pas de solution en nombres entiers naturels.

2ème cas : $d = 5$. Alors $ab = md = 2200$ puis

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 4625 \\ ab = 2200 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a + b)^2 - 2ab = 4625 \\ ab = 2200 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a + b)^2 = 9025 \\ ab = 2200 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = 95 \\ ab = 2200 \end{array}\right..$$

a et b sont alors les solutions de l'équation $(X-a)(X-b)=0$ qui s'écrit encore $X^2-(a+b)X+ab=0$ c'est-à-dire $X^2-95X+2200=0$ (E). Le discriminant de cette équation est

$$\Delta=(-95)^2-4\times 2200=9025-8800=225=15^2,$$

et donc (E) admet pour solutions les nombres $\dfrac{95-15}{2}=40$ et $\dfrac{95+15}{2}=55$. Comme $a<b$, on a donc nécessairement $a=40$ et $b=55$ ce qui assure l'unicité d'un couple d'entiers naturels solution du système (1).

Réciproquement, soient $a=40$ et $b=55$. Alors $a<b$ puis $a^2+b^2=40^2+55^2=1600+3035=4625$. Enfin, $a=2^3\times 5$ et $b=5\times 11$ et donc $\text{ppcm}(a,b)=2^3\times 5\times 11=440$. Le couple $(40,55)$ est effectivement solution du système (1).

Le système (1) admet un couple solution et un seul : le couple $(40,55)$.

EXERCICE 3

1. f est dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]1,+\infty[$ et pour $x>1$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{-\ln'(x)}{\ln^2 x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln^2 x}=\frac{\ln^2 x+1}{x\ln^2 x}.$$

f' est strictement positive sur $]1,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

• Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $\ln x$ tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $\dfrac{1}{\ln x}$ tend vers $+\infty$ puis $-\dfrac{1}{\ln x}$ tend vers $-\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$.

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}=0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]1,+\infty,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{\ln x}=0$. On en déduit que la distance d'un point M de (C) d'abscisse x au point N de Γ de même abscisse tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou encore que les courbes C et Γ sont asymptotes en $+\infty$.

b) Soit $x>1$. $f(x)-\ln x=-\dfrac{1}{\ln x}$. Or pour $x>1$, $\ln x>0$ et donc $-\dfrac{1}{\ln x}<0$. Ainsi, pour tout réel $x>1$, $f(x)-\ln x<0$. On en déduit que

$\boxed{(C) \text{ est strictement au-dessous de } \Gamma \text{ sur }]1,+\infty[.}$

3. a) Soit $a>1$. Une équation de (T_a) est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ $(*)$. (T_a) passe par O si et seulement si le couple $(0,0)$ vérifie $(*)$ ce qui équivaut à $-af'(a)+f(a)=0$.

$\boxed{\text{Pour tout } a>1,\ (T_a) \text{ passe par } O \text{ si et seulement si } -af'(a)+f(a)=0.}$

b) Soit $x>1$.

$$g(x)=\left(\ln x-\frac{1}{\ln x}\right)-x\left(\frac{\ln^2 x+1}{x\ln^2 x}\right)=\ln x-\frac{1}{\ln x}-\frac{\ln^2 x+1}{\ln^2 x}=\frac{\ln^3 x-\ln^2 x-\ln-1}{\ln^2 x}.$$

Par suite, $g(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{\ln^3 x-\ln^2 x-\ln-1}{\ln^2 x}=0\Leftrightarrow\ln^3 x-\ln^2 x-\ln-1=0.$

c) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et pour $t\in\mathbb{R}$

$$u'(t)=3t^2-2t-1=(t-1)(3t+1).$$

D'après le cours sur le signe d'un trinôme du second degré, u' est strictement positive sur $]-\infty,-\dfrac{1}{3}[\cup]1,+\infty[$ et strictement négative sur $]-\dfrac{1}{3},1[$. On en déduit que la fonction u est strictement croissante sur $]-\infty,-\dfrac{1}{3}]$, strictement décroissante sur $[-\dfrac{1}{3},1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

En particulier, sur $]-\infty,1]$, u admet un maximum égal à $u\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ avec $u\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}-1<0$. On en déduit que u est strictement négative sur $]-\infty,1]$ et en particulier ne s'annule pas sur $]-\infty,1]$.
D'autre part, u est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ avec $u(1)=-2<0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=+\infty>0$. On en déduit que u s'annule une et une seule fois sur $[1,+\infty[$ en un certain réel $t_0>1$.

$\boxed{\text{La fonction } u \text{ s'annule une fois et une seule sur } \mathbb{R} \text{ en un certain réel } t_0>1.}$

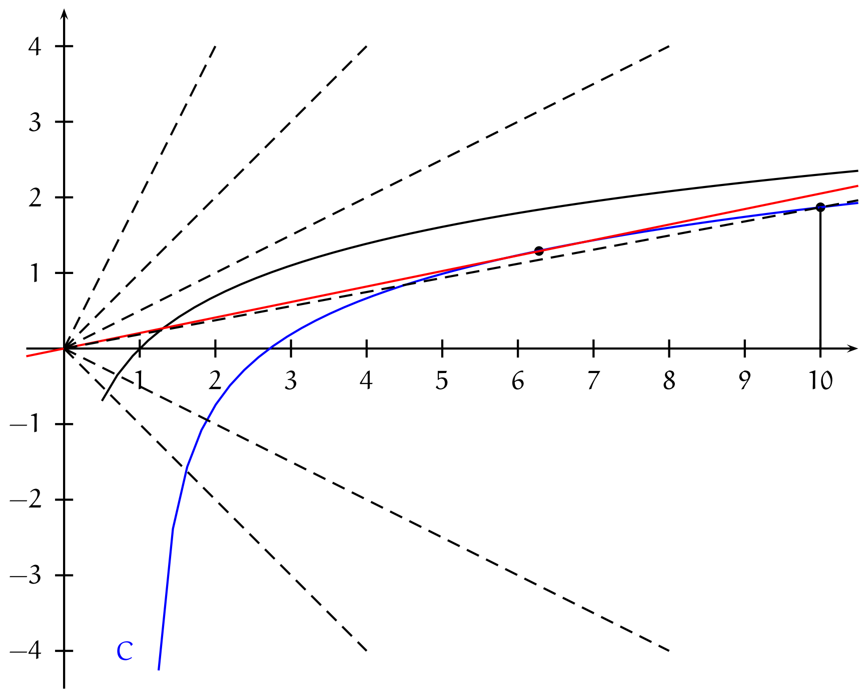
d) Soit $a > 1$.

$$T_a \text{ passe par } O \Leftrightarrow f(a) - af'(a) = 0 \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow u(\ln a) = 0 \Leftrightarrow \ln a = t_0 \Leftrightarrow a = e^{t_0}.$$

De plus, comme $t_0 > 0$, on a bien $e^{t_0} > 1$. Donc,

$$\boxed{\text{Il existe une tangente à } C \text{ passant par } O \text{ et une seule.}}$$

La machine fournit $1,839 < t_0 < 1,84$ puis $6,28 < e^{t_0} < 6,29$.



4. Soit m un réel. Notons m_0 le réel e^{t_0} et m_1 le coefficient directeur de la droite passant par le point O et le point de coordonnées $(10, f(10))$ c'est-à-dire $m_1 = \dfrac{1}{10}\left(\ln 10 - \dfrac{1}{\ln 10}\right)$. Sur le graphique précédent, on lit

- Si $m > m_0$, l'équation $f(x) = mx$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]1, 10]$.
- Si $m = m_0$, l'équation $f(x) = mx$ a une solution et une seule dans l'intervalle $]1, 10]$.
- Si $m_1 \leq m < m_0$, l'équation $f(x) = mx$ a exactement deux solutions dans l'intervalle $]1, 10]$.
- Si $m < m_1$, l'équation $f(x) = mx$ a une solution et une seule dans l'intervalle $]1, 10]$.

EXERCICE 4

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ et donc $[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Mais alors, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $t^n \cos t \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $x_n \geq 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est positive.}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt - \int_0^1 t^n \cos t \, dt = \int_0^1 (t^{n+1} \cos t - t^n \cos t) \, dt = \int_0^1 (t-1)t^n \cos t \, dt.$$

Or, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $t - 1 \leq 0$ et $t^n \cos t \geq 0$ et donc pour tout réel $t \in [0, 1]$, $(t - 1)t^n \cos t \leq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $x_{n+1} - x_n \leq 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $x_{n+1} \leq x_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t de $[0, 1]$, on a $t^n \geq 0$ et $\cos t \leq 1$. On en déduit que pour tout réel t de $[0, 1]$, $t^n \cos t \leq t_n$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $x_n \leq \int_0^1 t^n \, dt$ avec

$$\int_0^1 t^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ x_n \leq \frac{1}{n+1}.}$$

b) Pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.}$$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0, 1]$, posons $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = \sin t$. Les fonction u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{array}{rl} u(t) = t^{n+1} & v(t) = \sin t \\ u'(t) = (n+1)t^n & v'(t) = \cos t \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \int_0^1 t^{n+1} \cos t = \left[t^{n+1} \sin t \, dt\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \sin t \, dt = 1^{n+1} \sin 1 - 0^{n+1} \sin 0 - (n+1) \int_0^1 t^n \sin t \, dt \\ &= -(n+1)y_n + \sin 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin 1.}$$

b) Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{-x_{n+1} + \sin 1}{n+1}$. Or, d'après 2.b), $\lim_{n\to+\infty} -x_{n+1} + \sin 1 = \sin 1$ et d'autre part, $\lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{-x_{n+1} + \sin 1}{n+1} = 0$ et donc que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = 0.}$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on a $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos 1$ et donc $nx_n = y_{n+1} - x_n + \cos 1$. Or, $\lim_{n \to +\infty} y_{n+1} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ et donc $\lim_{n \to +\infty} nx_n = \cos 1$.
De même, d'après 3.a), pour tout entier naturel non nul n, on a $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin 1$ et donc $ny_n = -x_{n+1} - y_n + \sin 1$. On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} ny_n = \sin 1$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} nx_n = \cos 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} ny_n = \sin 1.}$$

