BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.

1) On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2) En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20% des stylos avec défaut.
On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepté ».

a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0,022$ à 10^{-3} près.

3) Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.
Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.
Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question **1)b)**.
Quel commentaire peut-on faire ?

EXERCICE 2 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

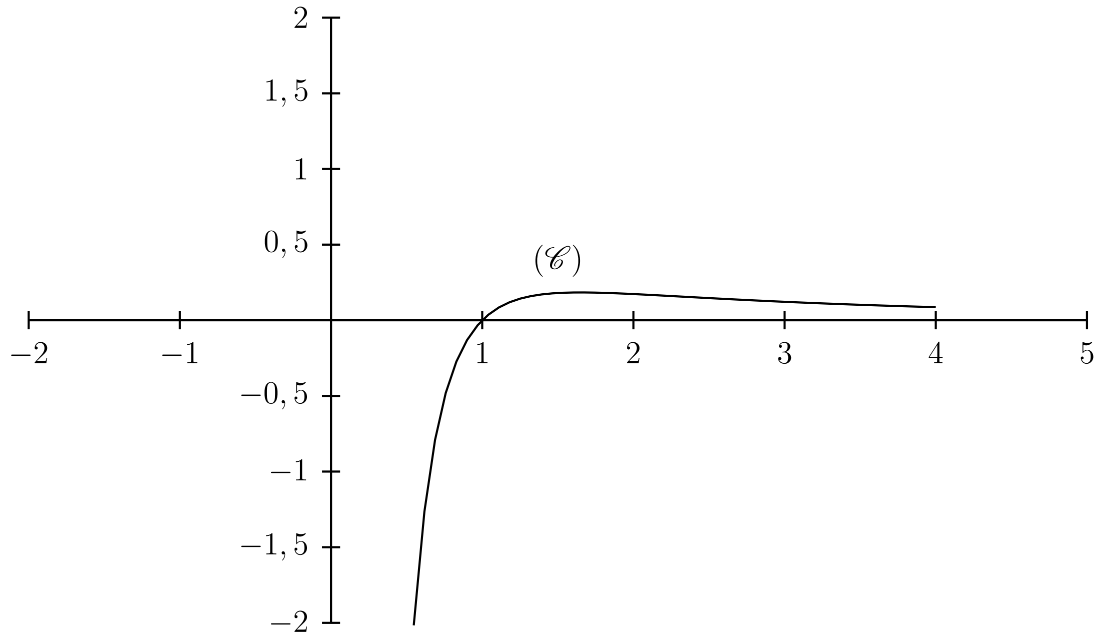
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ et par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variation sont donnés ci-après.



x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$	0

1) Le tableau de variation de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum.
Enoncer puis démontrer ces propriétés.

2) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Existe-t-il des tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui, donner leur équation.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt.$$

1) **a)** Que représente f pour la fonction g ?

b) En déduire le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.

2) Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3) **a)** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$g(x) = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}.$$

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1) **a)** Calculer u_1.

b) Les valeurs de u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} sont respectivement égales à :

$$45,\ 77,\ 117,\ 165,\ 221,\ 285,\ 357,\ 437,\ 525,\ 621.$$

A partir de ces données, conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2) On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 4n^2 + 12n + 5.$$

4) Valider la conjecture émise à la question **1)b)**.

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1) Le plan complexe est rapporté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + i,\ z_B = 5 + 2i \text{ et } z_C = i.$$

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a) Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)\overline{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right).$$

b) En déduire l'affixe de C', symétrique du point C par rapport à (AB).

c) Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $4x + 3y = 1$.

d) Vérifier que C' appartient à $(\mathscr{D})$.

2. **a)** Montrer que les droites $(\mathscr{D})$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.

b) On désigne par s_2 la symétrie d'axe $(\mathscr{D})$ et f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$.
Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.

c) Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.

d) Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3) *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

a) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$4x + 3y = 1.$$

b) Déterminer les points de $(\mathscr{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.