BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Réunion

EXERCICE 1

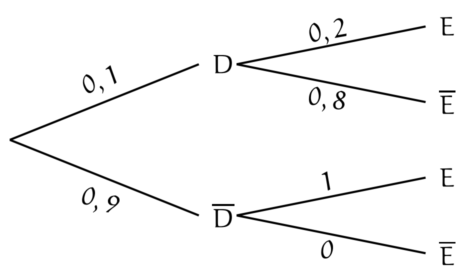
1) a) X est une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,1$.

b) • $p(A) = p(X = 0) = \binom{8}{0} \times (0,1)^0 \times (0,9)^8 = 0,9^8 = 0,43$ à 10^{-2} près.

• $p(B) = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,9^8 = 0,57$ à 10^{-2} près.

• $p(C) = p(X = 2) = \binom{8}{2} \times (0,1)^2 \times (0,9)^6 = 28 \times (0,1)^2 \times (0,9)^6 = 0,15$ à 10^{-2} près.

2) a) Traduisons la situation par un arbre.



b) La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(E) = p(D \cap E) + p(\overline{D} \cap E) = p(D) \times p_D(E) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(E) = 0,1 \times 0,2 + 0,9 \times 1 = 0,92.$$

La probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle est $0,92$.

c) La probabilité demandée est $p_E(D)$. Or

$$p_E(D) = \frac{p(E \cap D)}{p(E)} = \frac{p(D) \times p_D(E)}{p(E)} = \frac{0,1 \times 0,2}{0,92} = 0,022 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

La probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est $0,022$ à 10^{-2} près.

3) Notons Y le nombre de stylos ayant un défaut après le contrôle. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

• 8 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;

• chaque expérience a deux issues : « le stylo a un défaut » avec une probabilité $p = 0,022$ (d'après 2.) ou « le stylo n'a pas de défaut » avec une probabilité $1 - p = 0,978$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,022$.

La probabilité demandée est $p(Y = 0)$.

$$p(Y = 0) = \binom{8}{0} \times (0,022)^0 \times (0,978)^8 = 0,84 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Ainsi, la probabilité est passée de $0,43$ avant le contrôle à $0,84$ après le contrôle. Cette probabilité a nettement augmenté et le contrôle semble efficace.

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

Partie A

1) f est strictement croissante sur $]0, e^{1/2}]$ et strictement décroissante sur $[e^{1/2}, +\infty[$, admet un extremum égal à $f\left(e^{1/2}\right) = \dfrac{1}{2e}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Démontrons ces résultats.

• Dérivée de f
f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

• Signe de f′
Pour tout réel $x > 0$, on a $x^3 > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow -2\ln(x) > -1 \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x < e^{1/2} \text{ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}\text{)}, \end{aligned}$$

et de même $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{1/2}$. On retrouve donc le fait que la fonction f est strictement croissante sur $]0, e^{1/2}]$ et strictement décroissante sur $[e^{1/2}, +\infty[$.

• Calcul de l'extremum

$$f\left(e^{1/2}\right) = \frac{\ln\left(e^{1/2}\right)}{\left(e^{1/2}\right)^2} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}.$$

• Limite de f en 0
On sait que que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et d'autre part $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) \times \frac{1}{x^2} = -\infty.$$

• Limite de f en $+\infty$
Un théorème de croissances comparées donne directement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

2) Soit x_0 un réel strictement positif.
Une équation de la tangente (T_{x_0}) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ou encore

$$y = \frac{1 - 2\ln(x_0)}{x_0^3}(x - x_0) + \frac{\ln(x_0)}{x_0^2} \text{ ou enfin } y = \frac{1 - 2\ln(x_0)}{x_0^3}x + \frac{3\ln(x_0) - 1}{x_0^2}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} O \in (T_{x_0}) &\Leftrightarrow 0 = \frac{1 - 2\ln(x_0)}{x_0^3} \times 0 + \frac{3\ln(x_0) - 1}{x_0^2} \Leftrightarrow \frac{3\ln(x_0) - 1}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow 3\ln(x_0) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x_0) = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow x_0 = e^{1/3}. \end{aligned}$$

Quand $x_0 = e^{1/3}$, une équation de (T_{x_0}) est

$$y = \frac{1 - 2\ln\left(e^{1/3}\right)}{\left(e^{1/3}\right)^3}x + \frac{3\ln\left(e^{1/3}\right) - 1}{\left(e^{1/3}\right)^2} = \frac{1 - \dfrac{2}{3}}{e}x + 0 = \frac{x}{3e}.$$

$\boxed{(\mathscr{C}) \text{ admet une et une seule tangente passant par } O \text{ : la tangente au point d'abscisse } e^{1/3} \text{ d'équation } y = \dfrac{x}{3e}.}$

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

Partie B

1) a) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. On sait alors que g est la primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 et donc f est la dérivée de g.

b) La fonction g est donc dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Etudions le signe de la fonction g'. Pour tout réel $x > 0$, on a $x^2 > 0$. On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\ln(x)$ et donc la fonction g' est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$. Mais alors

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur }]0,1] \text{ et strictement décroissante sur } [1,+\infty[.}$$

2) • La fonction f est continue et positive sur $[1, 3]$ (car du signe de $\ln(x)$ sur $[1, 3]$). Donc $g(3) = \int_1^3 f(t)\ dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, la courbe de f et l'axe des abscisses.

• La fonction f est continue et négative sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et d'autre part, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^{1/2} f(t)\ dt = -\int_{1/2}^{1} f(t)\ dt$. Donc de nouveau $g\left(\frac{1}{2}\right)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$, la courbe de f et l'axe des abscisses.

3) a) Soit $x > 1$. Les deux fonctions $u\ :\ t \mapsto \ln(t)$ et $v\ :\ t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont définies et dérivables sur le segment $[1, x]$ et pour tout réel t de $[1, x]$, $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur le segment $[1, x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et en posant

$$\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & v(t) = -\dfrac{1}{t} \\ u'(t) = \dfrac{1}{t} & v'(x) = \dfrac{1}{t^2} \end{array}$$

on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\ dt = \left[\ln(t) \times \left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{t}\right)\ dt = -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1)}{1} + \int_1^x \frac{1}{t^2}\ dt \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{\ln(x) + 1}{x}. \end{aligned}$$

Si $x \in]0, 1]$, on écrit $g(x) = -\int_x^1 \frac{\ln(t)}{t^2}\ dt$, les calculs sont alors identiques et aboutissent après deux changements de signe au même résultat.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ g(x) = 1 - \frac{\ln(x) + 1}{x}.}$$

Remarque. Il est plus simple de vérifier directement que la fonction $x \mapsto 1 - \frac{\ln(x) + 1}{x}$ admet pour dérivée f et prend la valeur 0 en 1.

b) D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et d'autre part $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right) = 1$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

1) **a)** $u_1 = \left(1 + \frac{2}{1}\right) \times 5 + \frac{6}{1} = 21$.

$$\boxed{u_1 = 21.}$$

b) Donnons les premières valeurs de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_n	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96.

A partir de ce tableau, il semblerait que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit arithmétique de premier terme $d_0 = 16$ et de raison $r = 8$.

2) On sait que la somme d'un nombre fini de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à

$$\frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le premier terme de la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est v_0 et son n-ème terme est v_{n-1}. La somme cherchée vaut donc

$$v_0 + \ldots + v_{n-1} = \frac{(v_0 + v_{n-1})n}{2} = \frac{(v_0 + v_0 + (n-1)r)n}{2} = \frac{(32 + 8(n-1))n}{2} = \frac{8n^2 + 24n}{2} = 4n^2 + 12n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ v_0 + \ldots + v_{n-1} = 4n^2 + 12n.}$$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et d'autre part $4 \times 0^2 + 12 \times 0 + 5 = 5$. Donc la formule à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $u_{n-1} = 4(n-1)^2 + 12(n-1) + 5 = 4n^2 + 4n - 3$. Alors

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n} = \frac{(n+2)(4n^2 + 4n - 3) + 6}{n} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 5n}{n} \\ &= 4n^2 + 12n + 5. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = 4n^2 + 4n - 3.}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$d_n = \left(4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5\right) - (4n^2 + 12n + 5) = 4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 + 5 - 4n^2 - 12n - 5 = 16 + 8n.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $d_n = 16 + 8n$ et donc la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est effectivement la suite arithmétique de premier terme $d_0 = 16$ et de raison 8.

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

EXERCICE 4

1) a) Soit s la transformation d'expression complexe $z' = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)\overline{z}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right)$. On sait que s est une similitude indirecte.

$$z_{A'} = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)(2-i)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right) = \frac{8}{5}+\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i-\frac{4}{5}i-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i = 2+i = z_A,$$

et

$$z_{B'} = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)(5-2i)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right) = 4+\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i+3i-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i = 5+2i = z_B.$$

Donc, $s(A) = A$ et $s(B) = B$. Maintenant, on sait qu'une similitude ayant deux points invariants est soit l'identité, soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Comme s n'est pas l'identité (par exemple $s(O) \neq O$), s est une symétrie axiale et comme A et B sont invariants par s, s est la symétrie par rapport à la droite (AB) c'est-à-dire $s = s_1$.

$$\boxed{\text{L'expression complexe de } s_1 \text{ est } z' = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)\overline{z}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right).}$$

b)

$$z_{C'} = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)(-i)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right) = -\frac{4}{5}i+\frac{3}{5}-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i = \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i.$$

$$\boxed{z_{C'} = \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i.}$$

c) 1 ère solution. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels. On a alors

$$\begin{aligned} z' &= \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)(x-iy)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right) \\ &= \frac{4x}{5}-\frac{4y}{5}i+\frac{3x}{5}i+\frac{3y}{5}-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i \\ &= \frac{4x+3y-1}{5}+\frac{3x-4y+3}{5}i. \end{aligned}$$

Par suite,

$$z' \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+3y-1}{5} = 0 \Leftrightarrow 4x+3y = 1.$$

2 ème solution. Soit M un point du plan.

$$z' \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow M' \in (Oy) \Leftrightarrow s(M') \in s(Oy) \Leftrightarrow M \in s(Oy).$$

Maintenant, $s(Oy)$ est la droite passant par les points $O' = s(O)$ et $C' = s(C)$ avec $z_{O'} = -\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ et $z_{C'} = \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$. Comme

$$4x_{O'}+3y_{O'} = -\frac{4}{5}+\frac{9}{5} = 1,$$

et

$$4x_{C'}+3y_{C'} = \frac{8}{5}-\frac{3}{5} = 1,$$

les points O' et C' sont deux points distincts de la droite $(\mathscr{D})$ et donc

$$(\mathscr{D}) = (O'C') = (s(O)s(C)) = s((Oy)).$$

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

En résumé, z' est imaginaire pur si et seulement si $M \in (\mathscr{D})$.

d) D'après c), $C' \in (\mathscr{D})$.

2) a) Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite (AB). Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x - 2 = k(5-2) \\ y - 1 = k(2-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = 2 + 3k \\ y = 1 + k \end{array}\right. .$$

Soit alors $M(2 + 3k, 1 + k)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB).

$$M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow 4(2 + 3k) + 3(1 + k) = 1 \Leftrightarrow 15k = -10 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}.$$

Pour $k = -\dfrac{2}{3}$, on obtient le point Ω de coordonnées $\left(2 - 3 \times \dfrac{2}{3}, 1 - \dfrac{2}{3}\right)$ ou encore $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{\omega = \frac{i}{3}.}$$

b) f est la composée de deux isométries indirectes et donc f est une isométrie directe ou encore une similitude directe de rapport 1.

c) Ω appartient aux droites (AB) et $(\mathscr{D})$. Donc Ω est invariant par s_1 et par s_2. Par suite, $f(\Omega) = s_2(s_1(\Omega)) = s_2(\Omega) = \Omega$. D'autre part, le point C' appartient à la droite $(\mathscr{D})$ d'après la question 1)d) et donc $f(C) = s_2(s_1(C)) = s_2(C') = C'$.

$$\boxed{f(\Omega) = \Omega \text{ et } f(C) = C'.}$$

d) f est une isométrie directe et puisque $f(C) = C' \neq C$, f n'est pas l'identité du plan. On sait alors que f est une rotation. Son centre est son unique point invariant c'est-à-dire le point Ω d'après la question précédente.

$$\boxed{f \text{ est une rotation de centre } \Omega \text{ d'affixe } \omega = \frac{i}{3}.}$$

3) a) Le couple $(x_0, y_0) = (1, -1)$ est une solution particulière de l'équation proposée. Le théorème de Bézout montre alors que les entiers 3 et 4 sont premiers entre eux.

Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

• Si $4x + 3y = 1$, alors $4x + 3y = 4x_0 + 3y_0$ et donc $4(x - x_0) = 3(y_0 - y)$. Mais alors l'entier 3 divise l'entier $4(x - x_0)$ et puisque 3 et 4 sont premiers entre eux, l'entier 3 divise l'entier $x - x_0$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 3k$ ou encore tel que $x = x_0 + 3k = 1 + 3k$. De même, l'entier 4 divise $y_0 - y$ et il existe un entier relatif k' tel que $y_0 - y = 4k'$ ou encore $y = y_0 - 4k' = -1 - 4k'$.

• Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 3k$ et $y = y_0 - 4k'$.

$$4x+3y = 1 \Leftrightarrow 4(x_0+3k)+3(y_0-4k') = 1 \Leftrightarrow 4x_0+3y_0+3\times4\times(k-k') = 1 \Leftrightarrow 3\times4\times(k-k') = 0 \Leftrightarrow k-k' = 0 \Leftrightarrow k' = k.$$

$$\boxed{\text{Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation } 4x + 3y = 1 \text{ sont les couples de la forme } (1 + 3k, -1 - 4k),\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Dit autrement, les points de $(\mathscr{D})$ à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(1 + 3k, -1 - 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Soit $M(1 + 3k, -1 - 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$, un point de $(\mathscr{D})$ à coordonnées entières. On a

$$OM = \sqrt{(1 + 3k)^2 + (-1 - 4k)^2} = \sqrt{9k^2 + 6k + 1 + 16k^2 + 8k + 1} = \sqrt{25k^2 + 14k + 2}.$$

Par suite,

$$OM \leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{25k^2 + 14k + 2} \leq 9 \Leftrightarrow 25k^2 + 14k + 2 \leq 81 \Leftrightarrow 25k^2 + 14k - 79 \leq 0.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

Le discriminant du trinôme $25x^2 + 14x - 79$ vaut $\Delta = 14^2 - 4 \times 25 \times (-79) = 196 + 7900 = 7996$. Ce trinôme admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-14 - \sqrt{7996}}{50} = -2,06\ldots$ et $x_2 = \dfrac{-14 + \sqrt{7996}}{50} = 1,5\ldots$
Le signe d'un trinôme du second degré est connu et donc pour tout entier relatif k,

$$25k^2 + 14k - 79 \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq k \leq x_2 \Leftrightarrow -2 \leq k \leq 1.$$

Enfin, $k = -2$, $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$ fournissent successivement les points de coordonnées $(-5, 7)$, $(-2, 3)$, $(1, -1)$ et $(4, -5)$.

Les points de $(\mathscr{D})$ à coordonnées entières dont la distance à O est inférieure à 9 sont les points de coordonnées $(-5, 7)$, $(-2, 3)$, $(1, -1)$ et $(4, -5)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.