

# BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Pondichéry

## EXERCICE 1

1) a. Soit  $x \geq 1$ . En particulier,  $x > 0$  et donc  $e^x > 1$  puis  $e^x - 1 \neq 0$ .

• On en déduit que la fonction  $f$  est bien définie sur  $[1; +\infty[$ .

• De plus, la fonction  $f$  est continue sur  $[1; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions continues sur  $[1; +\infty[$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $[1; +\infty[$ . Mais alors, la fonction  $H$  est bien définie sur  $[1; +\infty[$ .

Les fonctions  $f$  et  $H$  sont bien définies sur  $[1; +\infty[$ .

b.  $H$  est la primitive de  $f$  sur  $[1; +\infty[$  qui s'annule en 1. Donc

$H$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  et  $H' = f$ .

c. Pour  $x \in [1; 3]$ , on a  $x > 0$  et donc  $e^x - 1 > 0$  puis  $\frac{x}{e^x - 1} > 0$ . Par suite,  $f$  est positive sur  $[1; 3]$ . Le nombre  $H(3)$  est donc l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  constitué des points  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  tels que  $1 \leq x \leq 3$  et  $0 \leq y \leq f(x)$ .

2) a. Soit  $x \in [1; 3]$ .  $e^x \neq 0$  et on peut donc écrire

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = x \frac{\frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

b. Pour  $x \in [1; 3]$ , posons  $u(x) = x$  et  $v(x) = \ln(1 - e^{-x})$ . Les deux fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[1; 3]$  et pour  $x \in [1; 3]$ , on a

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v(x) &= \ln(1 - e^{-x}) \\ u'(x) &= 1 & v'(x) &= \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \end{aligned}$$

De plus les fonctions  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[1; 3]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^3 x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\ &= [x \ln(1 - e^{-x})]_1^3 - \int_1^3 1 \times \ln(1 - e^{-x}) dx = 3 \ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx. \end{aligned}$$

$$\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx.$$

c. La fonction exponentielle est croissante sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $\ln$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ . Donc pour  $x$  réel,

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow e^{-3} \leq e^{-x} \leq e^{-1} \Rightarrow 1 - e^{-1} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - e^{-3} \Rightarrow \ln(1 - e^{-1}) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln(1 - e^{-3}).$$

$$\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1; 3], \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

d. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \int_1^3 dx \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \int_1^3 dx,$$

ou encore  $2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$ . Mais alors à partir de la formule de la question b.,

$$3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right),$$

ce qui s'écrit

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \left[ \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \right].$$

A l'aide de la calculatrice, on obtient encore

$$0,4 \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 1,2.$$

## EXERCICE 2

### Partie A. Démonstration de cours :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes puis  $s$  la transformation d'expression complexe  $z' = az + b$ .

$$s(A) = A' \text{ et } s(B) = B' \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_{A'} \\ az_B + b = z_{B'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -az_A + z_{A'} \\ az_B - az_A + z_{A'} = z_{B'} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \\ b = -\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} z_A + z_{A'} \end{cases} \quad (\text{car } A' \neq A).$$

Ainsi, il existe un et un seul couple de complexes  $(a, b)$  tel que  $s(A) = A'$  et  $s(B) = B'$ . De plus,  $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \neq 0$  (car  $B' \neq A'$ ) et donc  $s$  est une similitude plane directe.

si  $A \neq A'$  et  $B \neq B'$ , il existe une unique similitude plane directe transformant  $A$  en  $A'$  et  $B$  en  $B'$ .

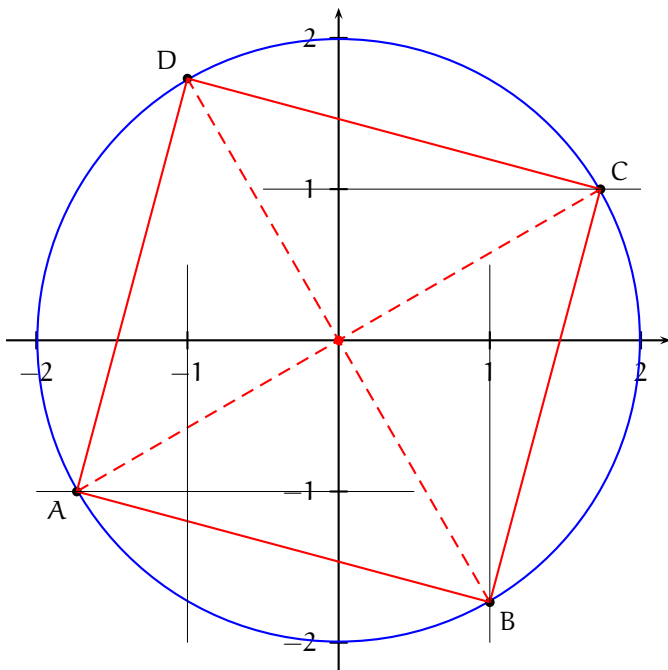
### Partie B.

1) a.  $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ . Puis,

- $z_A = -\sqrt{3} - i = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left( \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 2e^{-5i\pi/6}$ ,
- $z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2e^{-i\pi/3}$ ,
- $z_C = -z_A = e^{i\pi} \times 2e^{-5i\pi/6} = 2e^{i\pi/6}$ ,
- $z_D = -z_B = e^{i\pi} \times 2e^{-i\pi/3} = 2e^{2i\pi/3}$ .

$$z_A = 2e^{-5i\pi/6}, z_B = 2e^{-i\pi/3}, z_C = -z_A = 2e^{i\pi/6} \text{ et } z_D = -z_B = 2e^{2i\pi/3}.$$

b.



Les quatre points  $A, B, C$  et  $D$  sont sur le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon  $2$ .

Le point  $A$  est le point d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $y = -1$  dont l'abscisse est négative.

Le point  $B$  est le point d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $x = 1$  dont l'ordonnée est négative.

Le point  $C$  est le point d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $y = 1$  dont l'abscisse est positive.

Le point  $D$  est le point d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $x = -1$  dont l'ordonnée est positive.

c. • On a  $z_C = -z_A$  et  $z_D = -z_B$  et donc  $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = 0$ . Ainsi, le milieu des diagonales  $[AC]$  et  $[BD]$  est le point  $O$ . Le quadrilatère  $ABCD$  est donc un parallélogramme de centre  $O$ .

•  $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{-i\pi/3}}{2e^{-5i\pi/6}} = e^{-i\pi/3 + i5\pi/6} = e^{i\pi/2} = i$ . Ainsi,  $z_B = e^{i\pi/2}z_A$  et donc  $B$  est l'image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . On en déduit que  $OA = OB$  et  $(OA) \perp (OB)$  puis que  $AC = BD$  et  $(AC) \perp (BD)$ .

Ainsi, les diagonales  $[AC]$  et  $[BD]$  du parallélogramme  $ABCD$  sont perpendiculaires et de mêmes longueurs et donc

le quadrilatère  $ABCD$  est un carré.

2) a.  $e^{-i\pi/3}$  est de module 1 et n'est pas égal à 1. Donc  $g$  est une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ . Le centre de  $g$  est l'unique point invariant par  $g$ . Or, pour  $z$  complexe,

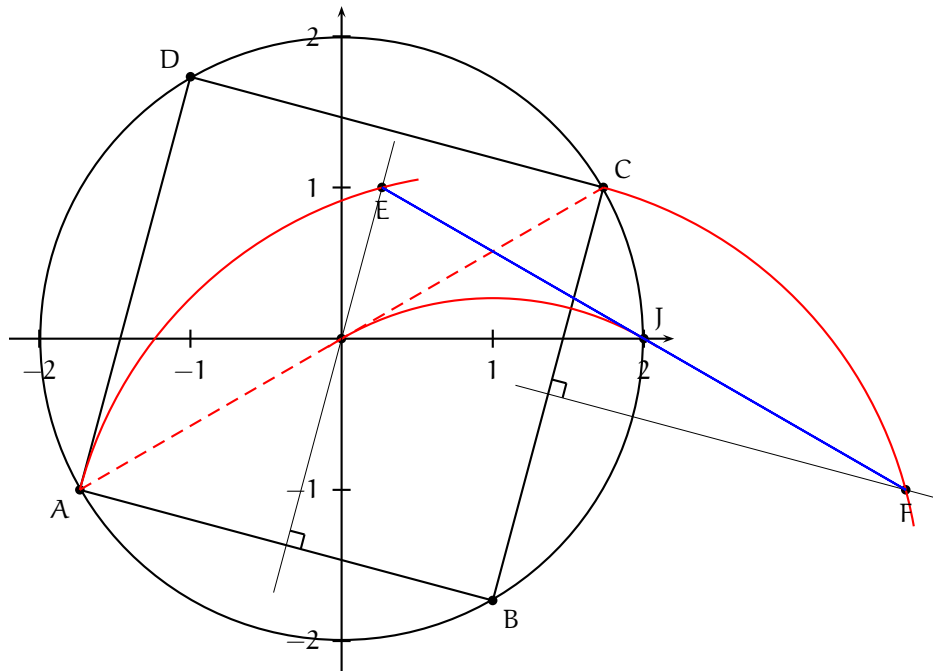
$$z = e^{-i\pi/3}z + 2 \Leftrightarrow z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = 2 \Leftrightarrow e^{i\pi/3}z = 2 \Leftrightarrow z = 2e^{-i\pi/3} \Leftrightarrow z = z_B.$$

g est la rotation de centre  $B$  et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ .

b.  $E$  est l'image de  $A$  par la rotation de centre  $B$  et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ . Donc, le triangle  $BEA$  est un triangle équilatéral indirect.

Le point  $E$  est donc sur le cercle de centre  $B$  passant par  $A$  et sur la médiatrice de  $[AB]$  en tournant dans le sens indirect. De même, le point  $E$  est sur le cercle de centre  $B$  passant par  $C$  et sur la médiatrice de  $[BC]$  en tournant dans le sens indirect.

Enfin, si  $J'$  est le point de coordonnées  $(2, 0)$ , le triangle  $BOJ'$  est équilatéral indirect et donc  $J' = J$ .

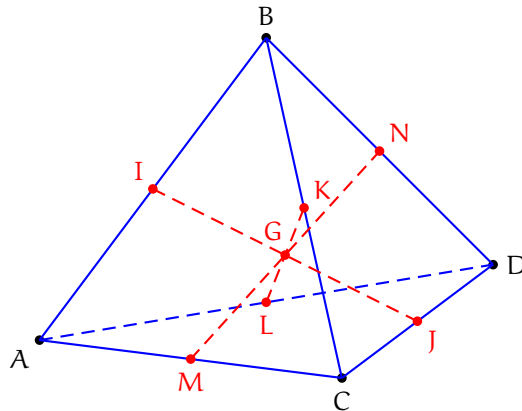


c. Le point  $O$  est le milieu du segment  $[AC]$  et donc le point  $r(O)$  est le milieu du segment  $[r(A), r(C)]$  ou encore

le point  $J$  est le milieu du segment  $[EF]$ .

### EXERCICE 3

1)



D'après le théorème du barycentre partiel,

$$G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\} = \text{bar}\{(\text{bar}\{(A, 1), (B, 1)\}, 2), (\text{bar}\{(C, 1), (D, 1)\}, 2)\} = \text{bar}\{(I, 2), (J, 2)\} \\ = \text{bar}\{(I, 1), (J, 1)\}.$$

Donc, G est le milieu du segment [I, J]. De même en associant B et C puis A et D, on voit que G est le milieu du segment [KL] et en associant A et C puis B et D, on voit que G est le milieu du segment [MN]. En particulier,

Les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

2) a. Les diagonales du quadrilatère IKJL se coupent en leur milieu. Donc le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

Dans le triangle ABC, I est le milieu de [BA] et K est le milieu de [BC]. Donc  $IK = \frac{1}{2}AC$ .

De même, dans le triangle ABD, I est le milieu de [AB] et L est le milieu de [AD]. Donc  $IL = \frac{1}{2}BD$ .

Par hypothèse,  $AC = BD$  et on en déduit que  $IK = IL$ . Ainsi, le parallélogramme IKJL a deux consécutifs égaux et donc

le quadrilatère IKJL est un losange.

Par symétrie des rôles, les quadrilatères IMJN ( $IM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = JN$ ) et KNLM ( $KN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = KM$ ) sont aussi des losanges.

b. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et donc

$(IJ) \perp (KL)$ ,  $(IJ) \perp (MN)$  et  $(KL) \perp (MN)$ .

3) a. D'après la question précédente, la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (KL) et (MN) qui sont deux droites sécantes du plan (MKN). On en déduit que

la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

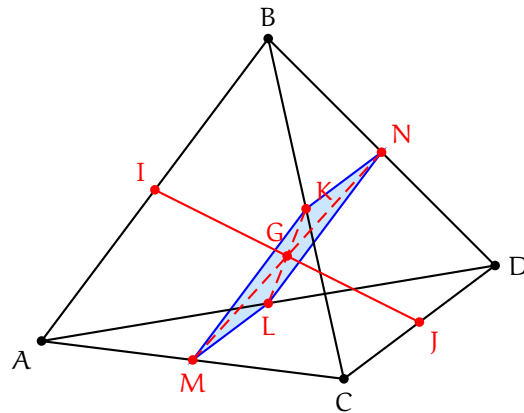
b. Puisque la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN), la droite (IJ) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (IJ) est orthogonale à la droite (MK) et donc tout vecteur directeur de la droite (IJ) est orthogonal à tout vecteur directeur de la droite (MK). On en déduit que

$$\vec{IJ} \cdot \vec{MK} = 0.$$

Dans le triangle ABC, M est le milieu de [CA] et K est le milieu de [CB]. On en déduit que  $\vec{AB} = 2\vec{MK}$  et donc  $\vec{IJ} \cdot \vec{AB} = 2\vec{IJ} \cdot \vec{MK} = 0$ . Par suite,

la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB).

De même, la droite (IJ) est orthogonale à la droite (KN) et donc  $\vec{IJ} \cdot \vec{CD} = 2\vec{IJ} \cdot \vec{KN} = 0$  et la droite (IJ) est orthogonale à la droite (CD).



c. Le plan médiateur de  $[AB]$  est le plan passant par I de vecteur normal  $\vec{AB}$  ou encore l'ensemble des points M tels que  $\vec{MI} \cdot \vec{AB} = 0$ . Comme la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB) et que le point G est sur la droite (IJ), on a  $\vec{GI} \cdot \vec{AB} = 0$  et donc

G est dans le plan médiateur de  $[AB]$ .

Par symétrie des rôles, le point G est aussi dans le plan médiateur de  $[CD]$  et  $[AC]$ .

d. G est dans le plan médiateur de  $[AB]$  et donc  $GA = GB$ . G est dans le plan médiateur de  $[CD]$  et donc  $GC = GD$ . G est dans le plan médiateur de  $[AC]$  et donc  $GA = GC$ . Finalement  $GA = GC = GD = GB$  ce qui montre que

G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

## EXERCICE 4

### Partie A : un modèle discret

1) a. Pour tout réel  $x$  de  $[0; 20]$ ,  $f(x) = \frac{1}{10}(20x - x^2)$ .  $f$  est dérivable sur  $[0; 20]$  et pour tout réel  $x$  de  $[0; 20]$ ,  $f'(x) = \frac{1}{10}(20 - 2x) = \frac{1}{5}(10 - x)$ . On en déduit le :

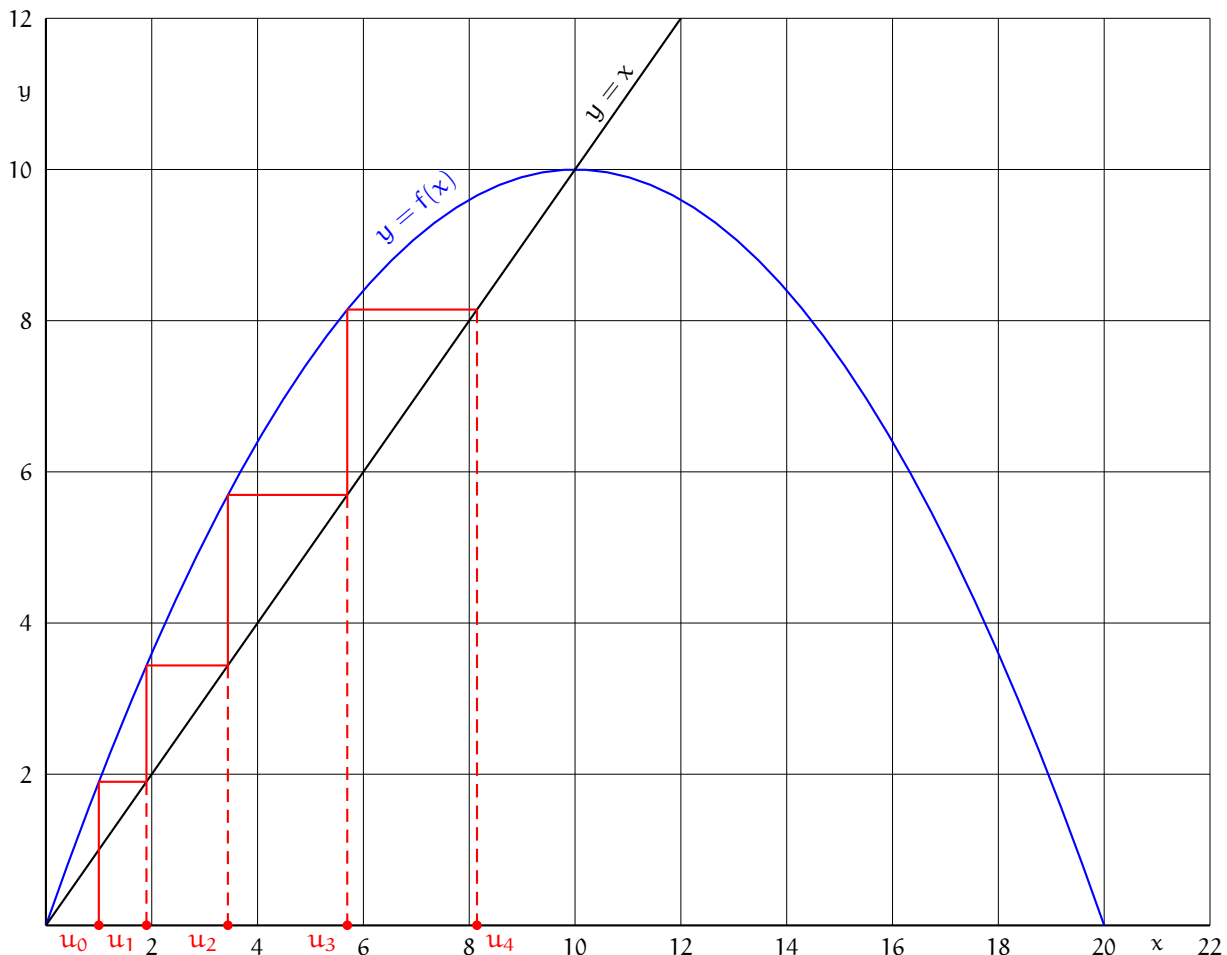
Tableau de variations de  $f$ .

$x$	0	10	20	
$f'(x)$		+	0	-
$f$		↗ 10 ↘		
	0		0	

b.  $f$  admet donc un minimum égal à 0 atteint en  $x = 0$  et  $x = 20$  et un maximum égal à 10 atteint en  $x = 10$ . Donc,

pour tout  $x \in [0; 20]$ ,  $f(x) \in [0; 10]$ .

c. Représentation graphique de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .



2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ .

• On a  $u_0 = 1$  puis  $u_1 = f(u_0) = \frac{19}{10} = 1,9$  et donc  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$ .

• Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ . Puisque  $f$  est croissante sur  $[0; 10]$ , on a  $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$  ce qui s'écrit encore  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ .

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ .

3) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par 10. On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel que l'on note  $\ell$ . De plus, comme pour tout entier  $n$ , on a  $1 \leq u_n \leq 10$  (car  $u_0 = 1$  et car la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante), quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $1 \leq \ell \leq 10$ . Ensuite, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$  et quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $\ell = \frac{1}{10}\ell(20 - \ell)$  puis  $10\ell = \ell(20 - \ell)$  puis  $10 = 20 - \ell$  (car  $\ell \neq 0$ ) et enfin  $\ell = 10$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 10$ .

### Partie B : un modèle continu

1) a. Soit  $y$  une fonction dérivable sur  $[0, +\infty[$  ne s'annulant pas sur  $[0, +\infty[$ . Posons alors  $z = \frac{1}{y}$ .  $z$  est définie, dérivable sur  $[0; +\infty[$ , ne s'annule pas sur  $[0; +\infty[$  et de plus  $y = \frac{1}{z}$  et donc  $y' = -\frac{z'}{z^2}$ . Mais alors,

$$y' = \frac{1}{20}y(10 - y) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{20}y^2 \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{z} - \frac{1}{20} \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Soient  $a$  et  $b$  deux réels. On sait que les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' = ay + b$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ . Ici,  $a = -\frac{1}{2}$  et  $b = \frac{1}{20}$ . Donc

les solutions de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-x/2} + \frac{1}{10}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Si une telle fonction ne s'annule pas sur  $[0; +\infty[$ , elle fournit une solution de  $(E)$  sur  $[0; +\infty[$  à savoir la fonction  $x \mapsto \frac{1}{Ce^{-x/2} + \frac{1}{10}}$ .

2) D'après ce qui précède, il existe une constante réelle  $C$  telle que pour tout  $x \geq 0$ ,  $g(x) = \frac{10}{10Ce^{-x/2} + 1}$ . L'égalité  $g(0) = 1$  fournit  $\frac{1}{C + \frac{1}{10}} = 1$  puis  $C + \frac{1}{10} = 1$  et donc  $C = \frac{9}{10}$ . Donc, pour tout réel  $x \geq 0$ ,

$$g(x) = \frac{1}{\frac{9}{10}e^{-x/2} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{9e^{-x/2} + 1}.$$

Pour tout réel positif  $x$ ,  $g(x) = \frac{10}{9e^{-x/2} + 1}$ .

3) La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $[0; +\infty[$  et pour  $x \geq 0$

$$g'(x) = 10 \times \frac{-(9e^{-x/2} + 1)'}{(9e^{-x/2} + 1)^2} = 10 \times \frac{-9 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times e^{-x/2}}{(9e^{-x/2} + 1)^2} = \frac{4,5e^{-x/2}}{(9e^{-x/2} + 1)^2}.$$

$g'$  est strictement positive sur  $[0; +\infty[$  et donc

$g$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x/2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{10}{0 + 1} = 10$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 10$ .



5) Soit  $x$  un entier naturel.

$$\begin{aligned}g(x) \geq 5 &\Leftrightarrow \frac{10}{9e^{-x/2} + 1} \geq 5 \\&\Leftrightarrow \frac{9e^{-x/2} + 1}{10} \leq \frac{1}{5} \text{ (par décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } ]0, +\infty[ \text{ et car } 9e^{-x/2} + 1 > 0) \\&\Leftrightarrow 9e^{-x/2} + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 9e^{-x/2} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x/2} \leq \frac{1}{9} \\&\Leftrightarrow \ln(e^{-x/2}) \leq \ln \frac{1}{9} \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur } ]0, +\infty[) \\&\Leftrightarrow -\frac{x}{2} \leq -\ln 9 \Leftrightarrow x \geq 2 \ln 9 \\&\Leftrightarrow x \geq 4,3 \dots \Leftrightarrow x \geq 5 \text{ (car } x \text{ est entier).}\end{aligned}$$

$x = 5$  correspond à l'année 2010 et donc

Le nombre de foyers possédant un téléviseur à fond plat dépassera 5 millions à partir de l'année 2010.