

EXERCICE 1

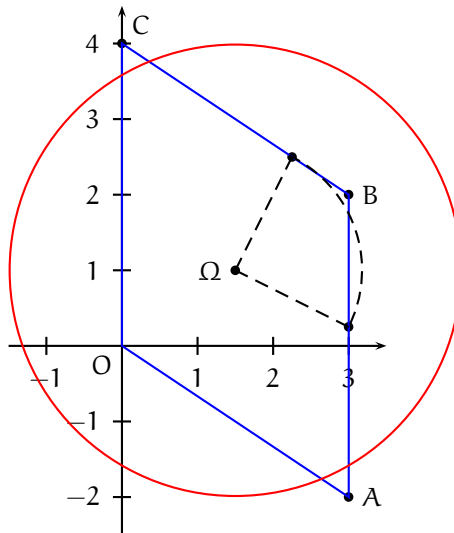
1. Le discriminant de l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ est

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = 36 - 52 = -16 = (4i)^2.$$

$\Delta < 0$ et donc l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $\frac{6-4i}{2}$ ou encore $3-2i$ et $\overline{3-2i} = 3+2i$.

Les solutions de l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ sont les nombres $a = 3 - 2i$ et $b = 3 + 2i$.

2.



3. $z_{\overrightarrow{OA}} = a = 3 - 2i$ et $z_{\overrightarrow{CB}} = b - c = (3 + 2i) - 4i = 3 - 2i$. Donc $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{CB}}$ ou encore $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$. On en déduit que

le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

4. Ω est le milieu de la diagonale [OB] et donc $z_{\Omega} = \frac{0+b}{2} = \frac{3}{2} + i$.

$z_{\Omega} = \frac{3}{2} + i$.

5. Notons (E) l'ensemble considéré. D'après le théorème du barycentre partiel, $\text{bar}(O(1), A(1), B(1), C(1)) = \text{bar}(O(1), B(1), A(1), C(1))$, $\text{bar}(\Omega(2), \Omega(2)) = \Omega$. Ω est donc l'isobarycentre du parallélogramme OABC et on sait que pour tout point M du plan on a

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{M\Omega}.$$

Soit M un point du plan.

$$M \in (E) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{M\Omega}\| = 12 \Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{M\Omega}\| = 12 \Leftrightarrow M\Omega = 3.$$

L'ensemble des points M du plan tel que $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$ est le cercle de centre Ω et de rayon 3.

6. a) L'abscisse de M est 3 et son ordonnée est β . Donc $z_M = 3 + \beta i$. Ensuite

$$\begin{aligned} z_N &= e^{i\pi/2}(z_M - z_\Omega) + z_\Omega = i(3 + \beta i - (\frac{3}{2} + i)) + \frac{3}{2} + i = i(\frac{3}{2} + (-1 + \beta)i) + \frac{3}{2} + i = \frac{3}{2}i - (-1 + \beta) + \frac{3}{2} + i \\ &= \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i. \end{aligned}$$

Le point N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

b) On a vu que le vecteur \overrightarrow{CB} a pour affixe $3 - 2i$. D'autre part,

$$z_{\overrightarrow{CN}} = z_N - c = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i - 4i = \frac{5}{2} - \beta - \frac{3}{2}i.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} N \in (BC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{CN} \text{ et } \overrightarrow{CB} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - \beta & 3 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(\frac{5}{2} - \beta) + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow -5 + 2\beta + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

N appartient à la droite (BC) si et seulement si $\beta = \frac{1}{4}$.

Dans ce cas, le point M a pour coordonnées $(3, \frac{1}{4})$ et le point N a pour coordonnées $(\frac{9}{4}, \frac{5}{2})$.

EXERCICE 2

1. a) Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $(-1, -1, 1)$ et les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AC} sont $(-2, -5, -1)$. Les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas proportionnelles (s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, alors $-2 = -t$ et $-5 = -t$ ce qui est impossible) et donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires ou encore

les points A, B et C ne sont pas alignés.

Les points A, B et C définissent donc un plan et un seul.

b) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-1) + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + (-1) \times (-5) - 1 = -4 + 5 - 1 = 0$. Donc le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Comme les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), on a montré que

le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC).

c) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) - (y-2) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z = 3.$$

Une équation du plan (ABC) est $2x - y + z = 3$.

2. Pour $t = -1$, on obtient $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 5 \end{cases}$. Ceci montre que le point D appartient à la droite (Δ) . La droite (Δ) est dirigée par

exemple par le vecteur de coordonnées $(-2, 1, -1)$. Ce vecteur est colinéaire à \vec{n} et donc la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC).

D \in (Δ) et (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC).

3. Puisque (Δ) est la perpendiculaire au plan (ABC) passant par D, le point E est le point d'intersection de (Δ) et du plan (ABC). Soit donc $M(2-2t, -1+t, 4-t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (Δ) .

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(2-2t) - (-1+t) + (4-t) = 3 \Leftrightarrow -6t + 9 = 3 \Leftrightarrow t = 1.$$

Quand $t = 1$, le point M a pour coordonnées $(0, 0, 3)$ et donc

E $(0, 0, 3)$.

Maintenant, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}$ sont $\begin{pmatrix} (1-0) + (0-0) + (-1-0) \\ (2-0) + (1-0) + (-3-0) \\ (3-3) + (4-3) + (2-3) \end{pmatrix}$ ou encore $(0, 0, 0)$. Ainsi,

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$ et donc E est l'isobarycentre du triangle ABC ou encore

E est le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 3

1. Soit n un entier naturel non nul. $1 \times (2n + 1) + (-2) \times n = 1$. Ainsi, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $u(2n + 1) + vn = 1$ et le théorème de Bézout permet d'affirmer que les entiers n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

La proposition 1 est vraie.

2. $3^2 + 3 + 3 = 15$ et donc $3^2 + 3 + 3 \equiv 0 [5]$. Mais l'entier 3 n'est pas congru à 1 modulo 5. Donc

la proposition 2 est fausse.

3. $N = 1000a + 100b + 10a + 7 = 1010a + 100b + 7$. Maintenant, $1010 = 7 \times 144 + 2$ et donc $1010 \equiv 2 [7]$. De même, $100 = 7 \times 14 + 2$ et donc $100 \equiv 2 [7]$. Finalement $N \equiv 2a + 2b [7]$. Donc,

$$\begin{aligned} N \text{ divisible par } 7 &\Rightarrow 1010a + 100b + 7 \equiv 0 [7] \Rightarrow 2a + 2b \equiv 0 [7] \Rightarrow 4 \times (2a + 2b) \equiv 0 [7] \\ &\Rightarrow 8a + 8b \equiv 0 [7] \Rightarrow a + b \equiv 0 [7] \\ &\Rightarrow a + b \text{ divisible par } 7. \end{aligned}$$

la proposition 3 est vraie.

4. L'expression complexe de la similitude considérée est

$$\begin{aligned} z' &= 2e^{i\pi/6}(z - (1 - i)) + 1 - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z - 1 + i) + 1 - i = (\sqrt{3} + i)(z - 1 + i) + 1 - i \\ &= (\sqrt{3} + i)z - \sqrt{3} + i\sqrt{3} - i - 1 + 1 - i = (\sqrt{3} + i)z - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 2)i. \end{aligned}$$

la proposition 4 est fausse.

5. L'expression complexe de s est $z' = \bar{z}$ et l'expression complexe de s_A est $z' = 2a - z$. Donc, l'expression complexe de $s_A \circ s$ est $z' = 2a - \bar{z}$ et l'expression complexe de $s \circ s_A$ est $z' = \overline{2a - z} = 2\bar{a} - \bar{z}$. Par suite,

$$s \circ s_A = s_A \circ s \Leftrightarrow (\text{pour tout complexe } z, 2\bar{a} - \bar{z} = 2a - \bar{z}) \Leftrightarrow \bar{a} = a \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

La proposition 5 est vraie.

EXERCICE 4

Partie A Restitution organisée de connaissances.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

Alors, la fonction $g - f$ est positive sur $[a, b]$ et par positivité de l'intégrale (premier pré-requis de l'énoncé), on a

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx \geq 0. \text{ Par linéarité de l'intégrale (deuxième pré-requis de l'énoncé), on en déduit que}$$
$$\int_a^b g(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \geq 0 \text{ puis que } \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Partie B

1. Pour tout réel $x \geq 0$, on a $e^{-x} > 0$ et donc $1 + e^{-x} > 1 > 0$. On en déduit que la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et de plus pour $x \geq 0$

$$f'(x) = 1 + \frac{(e^{-x})'}{1 + e^{-x}} = 1 + \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 + e^{-x} - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Mais alors f' est positive sur $[0, +\infty[$ et donc f est croissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, pour $x \geq 0$, on a $f(x) \geq f(0)$ avec $f(0) = 0 + \ln(1 + e^0) = \ln 2$ et donc $f(0) > 0$. f est donc positive sur $[0, +\infty[$.

La fonction f est croissante et positive sur $[0, +\infty[$.

2. a) Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \ln 1 = 0$. On a montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ et donc que

la courbe C admet la droite D pour asymptote en $+\infty$.

b) Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$. Or, pour tout réel $x \geq 0$, on a $1 + e^{-x} > 1$. Puisque la fonction \ln est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que pour tout réel $x \geq 0$, $\ln(1 + e^{-x}) > 0$ et donc que pour tout réel $x \geq 0$ $f(x) - x > 0$.

La courbe C est strictement au-dessus de la droite D sur $[0, +\infty[$.

3. a) Puisque la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est strictement positive sur $[0, 1]$, le nombre I est l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$, la droite D et la courbe C , exprimée en unités d'aire (voir graphique page suivante).

b) Pour $t \in [0, +\infty[$, posons $g(t) = \ln(1 + t) - t$. g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $t \geq 0$,

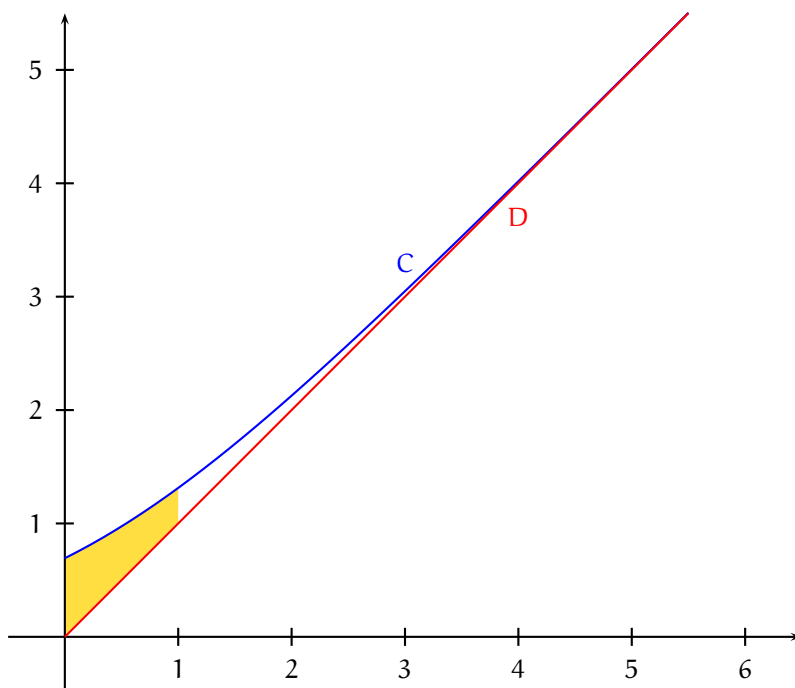
$$g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}.$$

Maintenant, pour tout réel positif t , on a $-\frac{t}{1+t} \leq 0$ et donc g' est négative sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et en particulier que pour tout réel $t \geq 0$, $g(t) \leq g(0)$ avec $g(0) = \ln 1 - 0 = 0$. Ceci fournit pour tout réel $t \geq 0$, $\ln(1 + t) - t \leq 0$ ou encore $\ln(1 + t) \leq t$.

Pour tout réel $t \geq 0$, $\ln(1 + t) \leq t$.

c) Soit $x \in [0, +\infty[$. Posons $t = e^{-x}$. Alors $t \in [0, +\infty[$ et d'après la question précédente, on a $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1 + t) \leq t$ ce qui s'écrit encore $\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.

Pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.



d) Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^1 \ln(1+e^{-x}) dx \leq \int_0^1 e^{-x} dx.$$

Or $\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = (-e^{-1}) - (-e^0) = 1 - e^{-1}$. D'autre part,

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = - [\ln(1+e^{-x})]_0^1 = -(\ln(1+e^{-1}) - \ln(1+e^0)) = \ln 2 - \ln(1+e^{-1}) = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right).$$

On a montré que

$$\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1}.$$

e) La calculatrice fournit $\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) = 0,37\dots$ et $1 - e^{-1} = 0,63\dots$

On en déduit que $0,3 \leq \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1} \leq 0,7$.

$$0,3 \leq I \leq 0,7.$$

4. Soit x un réel positif. La distance de M à N , exprimée en unités de longueur, est égale à $f(x) - x$ ou encore $\ln(1+e^{-x})$. Comme une unité de longueur est égale à 20 mm, cette distance est encore égale à $20 \ln(1+e^{-x})$ mm. Maintenant

$$20 \ln(1+e^{-x}) \leq 0,5 \Leftrightarrow \ln(1+e^{-x}) \leq 0,025$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(1+e^{-x})} \leq e^{0,025} \text{ (car la fonction exponentielle est croissante sur } \mathbb{R} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 1+e^{-x} \leq e^{0,025} \Leftrightarrow e^{-x} \leq e^{0,025} - 1 \text{ (avec } e^{0,025} - 1 > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-x}) \leq \ln(e^{0,025} - 1) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[\text{)}$$

$$\Leftrightarrow -x \leq \ln(e^{0,025} - 1) \Leftrightarrow x \geq -\ln(e^{0,025} - 1).$$

M et N sont indiscernables pour $x \geq -\ln(e^{0,025} - 1)$ avec $-\ln(e^{0,025} - 1) = 3,6\dots$