BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Liban

EXERCICE 1

Partie A

1. Notons A (resp. B) l'événement « le joueur tire une boule dans l'urne A (resp. B) ». La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = p(A) \times p_A(R) + p(B) \times p_B(R) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0,15.$$

$$\boxed{p(R) = 0,15.}$$

2. Calculons les probabilités des événements A et B sachant que l'événement R est réalisé.

$$p_R(A) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{p(A) \times p_A(R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{15} \times \frac{20}{3} = \frac{4}{9},$$

et

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \times p_B(R)}{p(R)} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{12} \times \frac{20}{3} = \frac{5}{9}.$$

Ainsi, $p_R(B) > p_R(A)$ et donc

$$\boxed{\text{si le joueur obtient une boule rouge, il est plus probable que cette boule provienne de l'urne B.}}$$

Partie B

1. Notons X le nombre de boules rouges obtenues au cours des deux épreuves. La variable aléatoire G a la même loi de probabilité que la variable X.
Maintenant, la variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 2 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est rouge » avec une probabilité $p = 0,15$ (d'après A.1.) ou « la boule tirée n'est pas rouge » avec une probabilité $1 - p = 0,85$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0,15$. On obtient ainsi

- $p(G = 2x) = p(X = 2) = \binom{2}{2}(0,15)^2(0,85)^0 = 0,0225,$
- $p(G = x - 2) = p(X = 1) = \binom{2}{1}(0,15)^1(0,85)^1 = 0,255,$
- $p(G = -4) = p(X = 0) = \binom{2}{0}(0,15)^0(0,85)^2 = 0,7225.$

On peut résumer ces résultats dans un tableau.

t	$2x$	$x-2$	-4
$p(G=t)$	$0,0225$	$0,255$	$0,7225$

2.

$$\begin{aligned} E(G) &= p(G=2x)\times 2x + p(G=x-2)\times(x-2) + p(G=-4)\times(-4) \\ &= 0,0225(2x) + 0,255(x-2) + 0,7225(-4) = 0,3x-3,4. \end{aligned}$$

$$\boxed{E(G) = 0,3x-3,4.}$$

3. $E(G)\geq 0 \Leftrightarrow 0,3x-3,4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{34}{3} \Leftrightarrow x\geq 12$ (car x est entier).

$\boxed{\text{L'espérance de gain devient positive pour } x\geq 12.}$

EXERCICE 2

Partie A

1. $r \circ h$ est la similitude plane directe de centre Ω, d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $k = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Son expression complexe est

$$\begin{aligned}
z' &= ke^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4}(z - (-2-2i)) + (-2-2i) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(z+2+2i) - 2 - 2i \\
&= \frac{3}{2}(1-i)(z+2+2i) - 2 - 2i = \frac{3}{2}(1-i)z + 3(1-i)(1+i) - 2 - 2i = \frac{3}{2}(1-i)z + 3(1-i^2) - 2 - 2i \\
&= \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i.
\end{aligned}$$

La similitude $r \circ h$ est donc la similitude f et

$$\boxed{\text{La proposition 1 est vraie.}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si 5 divise $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$, alors 5 divise $(5^{6n+1} + 2^{3n+1}) - (5^{6n+1}) = 2^{3n+1}$. Mais ceci n'est pas car 5 est impair et 2^{3n+1} est pair.

$$\boxed{\text{La proposition 2 est fausse.}}$$

1ère solution.

$$2^{3n+1} = (2^3)^n \times 2 = 8^n \times 2 \equiv 1^n \times 2\ [7] \text{ et donc } 2^{3n+1} \equiv 2\ [7].$$

D'autre part, $5^{6n+1} \equiv (-2)^{6n+1}$ [7] ou encore $5^{6n+1} \equiv (-1)^{6n+1}2^{6n+1}$ [7] ou enfin $5^{6n+1} \equiv -2^{6n+1}$ [7]. Mais,

$$2^{6n+1} = ((2^3)^n)^2 \times 2 \equiv (1^n)^2 \times 2\ [7] \text{ et donc } 2^{6n+1} \equiv 2\ [7] \text{ puis } 5^{6n+1} \equiv -2\ [7].$$

Finalement, $5^{63n+1} + 2^{3n+1} \equiv -2 + 2$ [7] ou encore $5^{63n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0$ [7]. Ceci signifie que $5^{63n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

2ème solution. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, 7 divise $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$.

- Pour $n = 0$, $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = 5 + 2 = 7$ et donc $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que 7 divise $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$. Il existe donc un entier relatif k tel que $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = 7k$. Mais alors

$$\begin{aligned}
5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} &= 5^6 \times 5^{6n+1} + 2^3 \times 2^{3n+1} = 15625 \times 5^{6n+1} + 8 \times 2^{3n+1} = 15617 \times 5^{6n+1} + 8(5^{6n+1} + 2^{3n+1}) \\
&= 7 \times 2231 \times 5^{6n+1} + 8 \times 7k = 7(2231 \times 5^{6n+1} + 8k).
\end{aligned}$$

Comme $2231 \times 5^{6n+1} + 8k$ est un entier relatif, ceci montre que $5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1}$ est divisible par 7.

$$\boxed{\text{La proposition 3 est vraie.}}$$

3. Puisque $11 \times 14 - 5 \times 28 = 154 - 140 = 14$, le couple $(x_0, y_0) = (14, 28)$ est un point à coordonnées entières de la droite (D).

Soit $M(x, y)$ un point à coordonnées entières. Si $M \in (D)$, alors $11x - 5y = 11x_0 - 5y_0$ ou encore $11(x - x_0) = 5(y - y_0)$. Ainsi, le nombre 5 divise $11(x - x_0)$ et puisque 5 est premier à 11 (5 et 11 étant des nombres premiers distincts), le théorème de Gauss permet d'affirmer 5 divise $x - x_0$. Il existe donc un entier relatif k tel que $x - x_0 = 5k$ ou encore $x = x_0 + 5k$. De même, 11 divise $y - y_0$ et il existe un entier relatif k' tel que $y = y_0 + 11k'$.
Réciproquement, soit k et k' deux entiers relatifs puis M le point de coordonnées $(5k + x_0, 11k' + y_0)$.

$$M \in (D) \Leftrightarrow 11(5k + x_0) - 5(11k' + y_0) = 14 \Leftrightarrow 5 \times 11(k - k') + 5x_0 - 11y_0 = 14 \Leftrightarrow 5 \times 11(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Donc, les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14, 11k + 28)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{La proposition 4 est vraie.}}$$

4. On note (P) le plan d'équation $x = \lambda$. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in \Sigma \cap (P) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ z = x^2 + y^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ z = y^2 + \lambda^2 \end{array} \right. .$$

La section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$ est donc une parabole et non une hyperbole.

$$\boxed{\text{La proposition 5 est fausse.}}$$

Soit $k \in [0, 9]$. La section du solide considéré par le plan d'équation $z = k$ a pour équations $\left\{ \begin{array}{l} z = k \\ x^2 + y^2 = k \end{array} \right.$. Cette section est un disque de rayon $\sqrt{k}$ et son aire $S(k)$ est donc égale à πk.
Le volume du premier solide est

$$\int_0^{9\sqrt{2}/2} \pi k \, dk = \pi \left[\frac{k^2}{2} \right]_0^{9\sqrt{2}/2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{81}{2} = \frac{81\pi}{4},$$

et le volume du deuxième solide est

$$\int_{9\sqrt{2}/2}^{9} \pi k \, dk = \pi \left[\frac{k^2}{2} \right]_{9\sqrt{2}/2}^{9} = \frac{\pi}{2} \left(81 - \frac{81}{2} \right) = \frac{81\pi}{4}.$$

$$\boxed{\text{La proposition 6 est vraie.}}$$

EXERCICE 3

Partie A. Démonstration de cours

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Soit A un réel.
Puisque la suite (u_n) n'est pas majorée, le réel A n'est pas un majorant de la suite (u_n). Il existe donc un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$. Mais la suite (u_n) est croissante et donc, si n est un entier supérieur ou égal à n_0, on a $u_n \geq u_{n_0} > A$.

On a montré que, pour tout réel A, tous les termes de la suite (u_n) sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie B

1. Pour $x \geq 0$, on a $x+1 > 0$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$. Mais alors, la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geq 0$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + x.$$

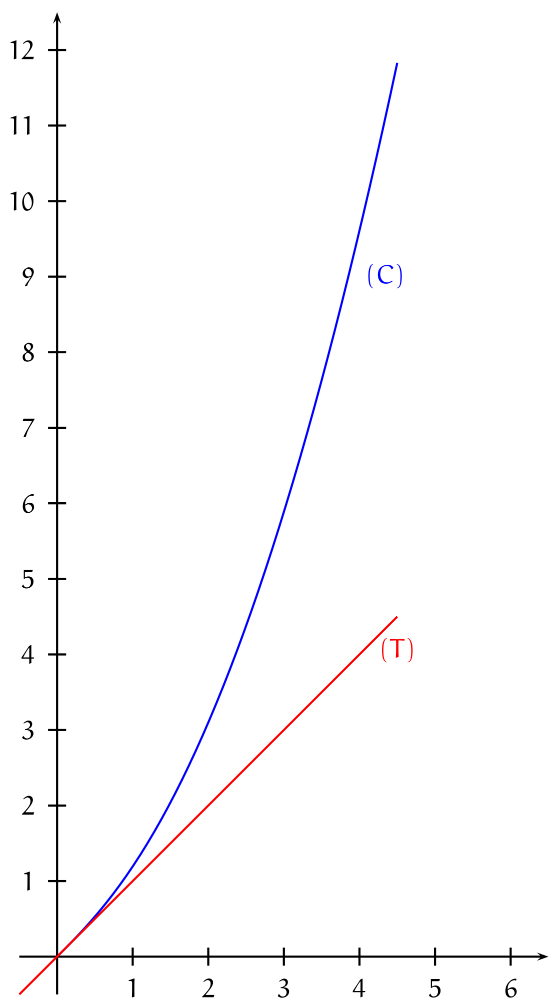
Cette expression est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

2. Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f(0) = \ln 1 + 0 = 0$ et $f'(0) = 1 + 0 = 1$. Donc

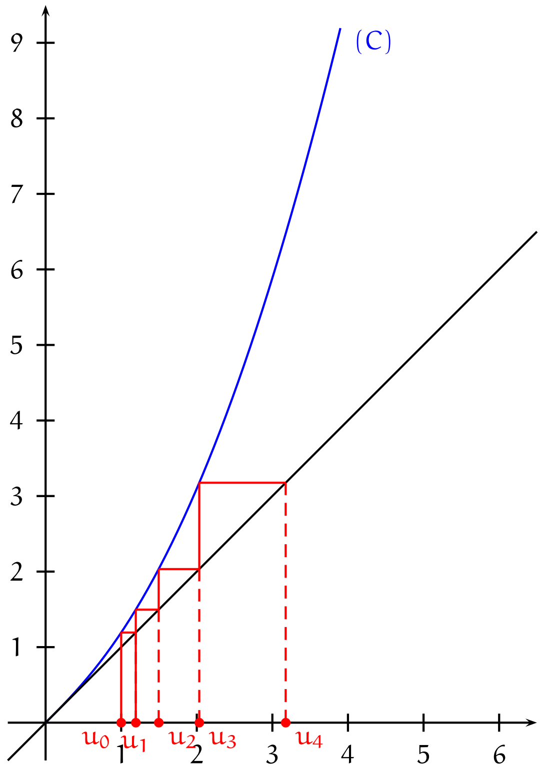
$$\boxed{\text{une équation de } (T) \text{ est } y = x.}$$

3. Construction de (C) et (T)



Partie C

1. Construction des cinq premiers termes de la suite (u_n).



2. Il semblerait que la suite soit croissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

- $u_0 = 1$ et donc l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n \geq 1$. Puisque f est croissante sur $[0, +\infty[$, on a $f(u_n) \geq f(1)$ ou encore $u_{n+1} \geq \ln 2 + \frac{1}{2}$.

Comme $\ln 2 + \frac{1}{2} = 1,1\ldots$, on a en particulier $u_{n+1} \geq 1$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \geq 1.}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

- On a $u_1 = 1,1\ldots$ et $u_0 = 1$. Par suite $u_0 \leq u_1$ et l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n \leq u_{n+1}$. Puisque u_n et u_{n+1} sont dans $[1, +\infty[$ et que f est croissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ et donc que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

c) Si la suite (u_n) est majorée, étant croissante, elle converge vers un certain réel ℓ. Puisque chaque u_n est supérieur ou égal à 1, on a alors $\ell \geq 1$.

Maintenant, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$ (par continuité de f sur $[1, +\infty[$ et donc en ℓ). Ceci montre que ℓ est l'abscisse d'un point commun à (T) et (C). Mais le résultat admis au début de la partie C montre que le seul point commun entre (C) et (T) est le point de coordonnées $(0, 0)$. Comme 0 n'est pas supérieur ou égal à 1, on aboutit à une contradiction. Donc,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée.}}$$

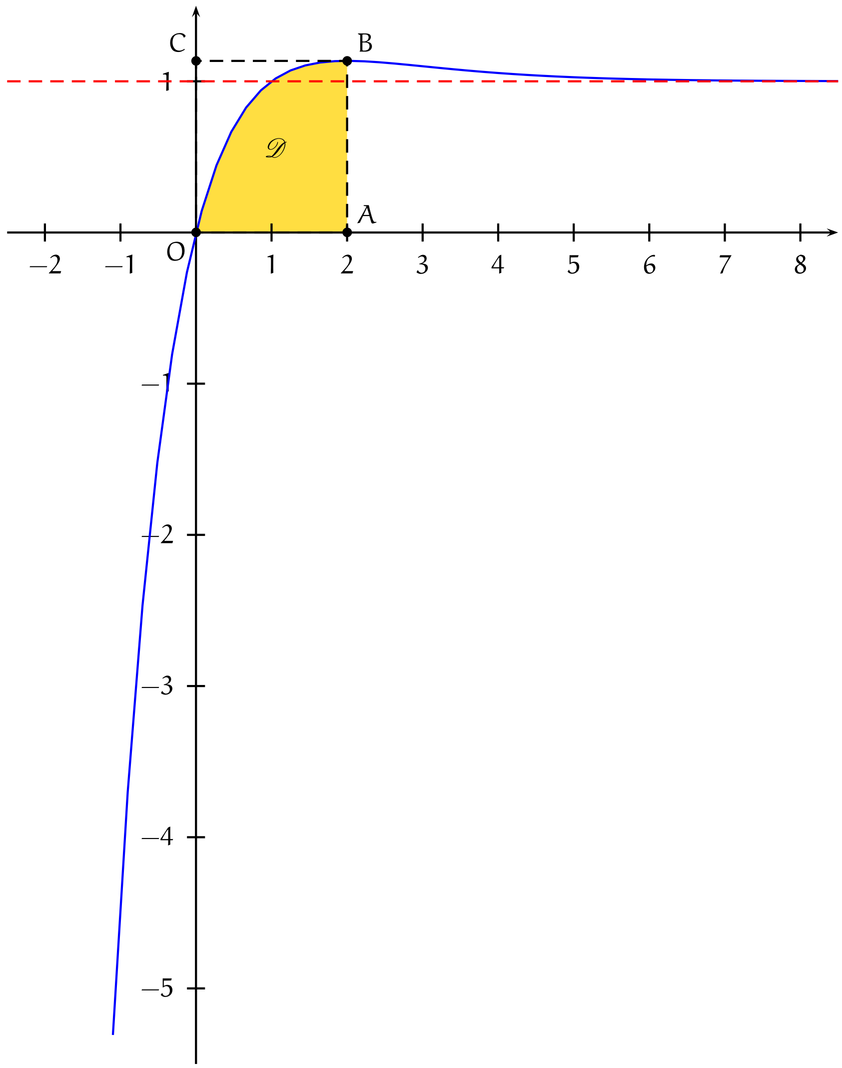
d) D'après le résultat de cours de la partie A, puisque la suite (u_n) est croissante et non majorée,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1. Exemple de courbe répondant au contraintes de l'énoncé.



2. a) D'après le tableau de variations de la fonction f, la fonction f est positive sur l'intervalle $[0, 2]$. On en déduit que $g(2)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ constitué des points de coordonnées (x, y) telles que $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$, exprimée en unités d'aire.

b) Puisque $g(2)$ est une aire, $g(2) \geq 0$. D'autre part, l'aire de $\mathscr{D}$ est inférieure ou égale à l'aire du rectangle $OABC$ (voir la figure de la question 1). L'aire de $OABC$, exprimée en unités d'aire, est égale à $2 \times (1 + e^{-2})$ ou encore à $2,27\ldots$. En particulier, l'aire de $OABC$ est inférieure ou égale à $2,5$ et il en est de même de l'aire de $\mathscr{D}$ et donc de $g(2)$.

$$\boxed{0 \leq g(2) \leq 2,5.}$$

3. a) Soit $x \geq 2$. Pour tout réel t de $[2, x]$, $f(t) \geq 1$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_2^x f(t)\ dt \geq \int_2^x 1\ dt = 1 \times (x - 2) = x - 2.$$

Maintenant, d'après la relation de Chasles, $g(x) = \int_0^2 f(t)\ dt + \int_2^x f(t)\ dt$. Or, $\int_0^2 f(t)\ dt \geq 0$ et $\int_2^x f(t)\ dt \geq x - 2$. On en déduit que $g(x) \geq x - 2$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \geq 2,\ g(x) \geq x - 2.}$$

b) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.}$$

4. On sait que g est la primitive de f qui s'annule en 0. g est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'=f$. Le tableau de variations de f montre que f est négative sur $]-\infty,0]$ et positive sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$\boxed{g \text{ est décroissante sur }]-\infty,0] \text{ et croissante sur } [0,+\infty[.}$$

Partie B

1. Soit x un réel.

1er cas : $x\geq 0$. Pour $t\in[0,x]$, posons $u(t)=t-1$ et $v(t)=-e^{-t}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,x]$ et pour tout réel t de $[0,x]$

$$\begin{array}{cc} u(t)=t-1 & v(t)=-e^{-t} \\ u'(t)=1 & v'(t)=e^{-t} \end{array}$$

De plus, les deux fonctions u' et v' sont continues sur $[0,x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt &= \left[(t-1)(-e^{-t})\right]_0^x-\int_0^x 1(-e^{-t})\,dt=(x-1)(-e^{-x})-(-1)(-e^{0})+\int_0^x e^{-t}\,dt\\ &=(1-x)e^{-x}-1+\left[-e^{-t}\right]_0^x=(1-x)e^{-x}-1+(-e^{-x}+1)=-xe^{-x}.\end{aligned}$$

2ème cas : $x<0$. On écrit $\int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt=-\int_x^0 (t-1)e^{-t}\,dt$. On effectue les mêmes calculs sur l'intervalle $[x,0]$ et comme les bornes sont inversées on obtient

$$\int_x^0 (t-1)e^{-t}\,dt=-(-xe^{-x})=xe^{-x},$$

et donc de nouveau $\int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt=-xe^{-x}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x, \text{ on a } \int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt=-xe^{-x}.}$$

2. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que pour tout réel x on a

$$g(x)=\int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt+\int_0^x 1\,dt=-xe^{-x}+x=x(1-e^{-x}).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ g(x)=x(1-e^{-x}).}$$

3. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-e^{-x}=+\infty$. Comme d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty.}$$

