BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

France métropolitaine

EXERCICE 1

1) a) La fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

Donc, la fonction F est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$. On en déduit que

$$I = \int_1^e \ln x \, dx = F(e) - F(1) = (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = e - e + 1 = 1.$$

$$\boxed{I = 1.}$$

b) Pour $x \in [1;e]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = (\ln x)^2$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;e]$ et on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = (\ln x)^2 \\ u'(x) = 1 & v'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x. \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1;e]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e 1 \times (\ln x)^2 \, dx = \left[x \times (\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \, dx \\ &= e(\ln e)^2 - (\ln 1)^2 - 2\int_1^e \ln x \, dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= e - 2I. \end{aligned}$$

$$\boxed{J = e - 2I.}$$

c) Par suite, $J = e - 2I = e - 2 \times 1 = e - 2$.

$$\boxed{J = e - 2.}$$

d) Le graphique fourni montre que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[1;e]$. Par suite,

$$A = \int_1^e (f(x) - g(x)) \, dx = \int_1^e f(x) \, dx - \int_1^e g(x) \, dx = I - J = 1 - (e - 2) = 3 - e.$$

$$\boxed{\text{L'aire } A \text{ est égale à } 3 - e \text{ unité d'aire.}}$$

2) Soit $x \in [1;e]$. Le point M a pour coordonnées $(x;\ln x)$ et le point N a pour coordonnées $(x;(\ln x)^2)$. Puisque pour $x \in [1;e]$, on a $f(x) \geq g(x)$,

$$MN = |y_N - y_M| = y_M - y_N = \ln x - (\ln x)^2.$$

Pour $x \in [1;e]$, posons $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$. h est dérivable sur $[1;e]$ et pour $x \in [1;e]$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x} = \frac{1 - 2\ln x}{x}.$$

Sur $[1;e]$, $h'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln x$. Donc, pour $x \in [1;e]$,

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{1/2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}.$$

Ainsi, la fonction h est croissante sur $[1;\sqrt{e}]$ et décroissante sur $[\sqrt{e};e]$. On en déduit que la fonction h admet un maximum en $\sqrt{e}$. Ce maximum vaut $h(\sqrt{e})$ avec

$$h(\sqrt{e}) = \ln(e^{1/2}) - (\ln(e^{1/2}))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{MN \text{ est maximale pour } x = \sqrt{e} \text{ et la valeur maximale de } MN \text{ est } \frac{1}{4}.}$$

EXERCICE 2

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2, -2, 2)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles ou encore les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou enfin

$$\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

b) Les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan et un seul. De plus,

- $2x_A + y_A - z_A - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$
- $2x_B + y_B - z_B - 3 = 2 + 2 - 1 - 3 = 0$
- $2x_C + y_C - z_C - 3 = 6 - 1 - 2 - 3 = 0.$

Ainsi, les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation $2x + y - z - 3 = 0$ et donc

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan (ABC) est } 2x + y - z - 3 = 0.}$$

2) Le plan (P) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, 2, -1)$ et le plan (Q) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}'$ de coordonnées $(2, 3, -2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont pas colinéaires et donc les plans (P) et (Q) sont sécants en une droite $(\mathscr{D})$.

On sait que l'ensemble $(\mathscr{D}')$ d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, est une droite. Pour vérifier que $(\mathscr{D}')$ est la droite $(\mathscr{D})$, il suffit donc de vérifier tout point de $(\mathscr{D}')$ appartient aux plans (P) et (Q). Or, pour tout réel t,

$$-2 + t + 2 \times 3 - t - 4 = -2 + t + 6 - t - 4 = 0,$$

et

$$2 \times (-2 + t) + 3 \times 3 - 2 \times t - 5 = -4 + 2t + 9 - 2t - 5 = 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{les plans (P) et (Q) sont sécants en la droite } (\mathscr{D}) \text{ de représentation paramétrique } \left\{\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.}$$

3) L'intersection des plans (ABC), (P) et (Q) est encore l'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan (ABC).
Soit donc $M(-2 + t, 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite $(\mathscr{D})$.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(-2 + t) + 3 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow -4 + t = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

Pour $t = 4$, le point M a pour coordonnées $(2, 3, 4)$ et donc

$$\boxed{\text{l'intersection des plans (ABC), (P) et (Q) est le point de coordonnées } (2, 3, 4).}$$

4) On sait que la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$ est la plus courte distance de A à un point de $(\mathscr{D})$.
Soit donc $M(-2 + t, 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite $(\mathscr{D})$.

$$\begin{aligned} AM^2 &= (-2 + t - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (t - 0)^2 = (t - 3)^2 + 4 + t^2 = t^2 - 6t + 9 + 4 + t^2 = 2t^2 - 6t + 13 \\ &= 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 13 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

Par suite, $AM = \sqrt{2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2}}$. Mais alors, $AM \geq \sqrt{\frac{17}{2}}$ avec égalité obtenue pour $t = \frac{3}{2}$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la distance du point A à la droite } \mathscr{D} \text{ est } \sqrt{\frac{17}{2}}.}$$

EXERCICE 3

1) ***Restitution organisée de connaissances***

a) Soit $t \geq 0$.

$$R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - (-e^{-\lambda t} + e^0) = 1 + e^{-\lambda t} - 1 = e^{-\lambda t}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \geq 0,\ R(t) = e^{-\lambda t}.}$$

b) Soient t et s deux réels positifs.

$$P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P((X > t) \cap (X > t+s))}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{R(t+s)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+s-t)} = e^{-\lambda s}.$$

En particulier, $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas de t et donc

$$\boxed{\text{la variable } X \text{ suit une loi de durée de vie sans vieillissement.}}$$

2) **a)** D'après la question 1)a), $P(X > 1000) = e^{-0,00026\times 1000} = e^{-0,26} = 0,77$ à 10^{-2} près puis $P(X \leq 1000) = 1 - P(X > 1000) = 1 - e^{-0,26} = 0,23$ à 10^{-2} près.

$$\boxed{P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0,26} \text{ et } P(X > 1000) = e^{-0,26}.}$$

b) La probabilité demandée est $P_{X>1000}(X > 1000+1000)$. D'après la question 1)b), cette probabilité est aussi $P(X > 1000)$ ou encore $e^{-0,26}$.

$$\boxed{P_{X>1000}(X > 2000) = e^{-0,26}.}$$

c) . La probabilité demandée est $P_{X>2000}(X \leq 3000)$. Or

$$P_{X>200}(X \leq 3000) = 1 - P_{X>200}(X > 3000) = 1 - P(X > 1000) = 1 - e^{-0,26}.$$

$$\boxed{P_{X>2000}(X \leq 3000) = 1 - e^{-0,26}.}$$

EXERCICE 4

1) Le point A est un point de la droite (d) à coordonnées entières car $4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1$. Posons $(x_0, y_0) = (1, -1)$.
Soient alors x et y deux entiers relatifs puis M le point de coordonnées (x, y).

$$M \in (d) \Rightarrow 4x + 3y = 1 \Rightarrow 4x + 3y = 4x_0 + 3y_0 \Rightarrow 4(x - x_0) = 3(y_0 - y).$$

L'entier 3 divise l'entier $3(y_0 - y)$ et donc aussi l'entier $4(x - x_0)$. Comme 3 est premier à 4, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 3 divise $x - x_0$ et il existe donc un entier relatif k tel que $x - x_0 = 3k$ ou encore tel que $x = 3k + 1$.
De même, 4 divise $y_0 - y$ et il existe un entier relatif k' tel que $y_0 - y = 4k'$ ou encore $y = -4k' - 1$.
En résumé, si $M(x, y)$ est un point de (d) à coordonnées entières, il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $x = 3k + 1$ et $y = -4k' - 1$.

Réciproquement, soit $M(3k + 1, -4k' - 1)$ où k et k' sont des entiers relatifs.

$$M \in (d) \Leftrightarrow 4(3k + 1) + 3(-4k' - 1) = 1 \Leftrightarrow 12k + 4 - 12k' - 3 = 1 \Leftrightarrow 12(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{Les points de } (d) \text{ à coordonnées entières sont les points de coordonnées } (3k + 1, -4k + 1),\ k \in \mathbb{Z}.}$$

2) Les points B et M_{-1} sont distincts de A et il existe donc une similitude directe de centre A et une seule transformant B en M_{-1}. Déterminons son rapport k et son angle θ. On sait que k et θ sont respectivement le module et un argument du rapport $\dfrac{z_{M_{-1}} - z_A}{z_B - z_A}$. Or

$$\frac{z_{M_{-1}} - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-2 + 3i) - (1 - i)}{(7 + \frac{7}{2}i) - (1 - i)} = \frac{-3 + 4i}{6 + \frac{9}{2}i} = \frac{-3 + 4i}{\frac{3}{2}(4 + 3i)} = \frac{2}{3} \times \frac{-3 + 4i}{4 + 3i} = \frac{2}{3} \times \frac{i(3i + 4)}{4 + 3i} = \frac{2}{3}i.$$

Maintenant, $\dfrac{2}{3}i = \dfrac{2}{3}e^{i\pi/2}$ et donc $k = \left|\dfrac{2}{3}i\right| = \dfrac{2}{3}$ et $\theta = \arg(\dfrac{2}{3}e^{i\pi/2}) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

$$\boxed{\text{La similitude de centre } A \text{ transformant } B \text{ en } M_{-1} \text{ a pour rapport } \frac{2}{3} \text{ et pour angle } \frac{\pi}{2}.}$$

3) On sait que s est une similitude directe car son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$. Déterminons l'image du point A par s.

$$z_{A'} = \frac{2}{3}iz_A + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i = \frac{2}{3}i(1 - i) + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i = 1 - i.$$

Ainsi, $z_{A'} = 1 - i = z_A$ ou encore $s(A) = A$. Ainsi, s est une similitude directe de centre A. On sait alors que son rapport et son angle sont respectivement le module et un argument du coefficient de z à savoir $\dfrac{2}{3}i$ et donc, d'après la question précédente

$$\boxed{s \text{ est la similitude de centre } A, \text{ de rapport } \frac{2}{3} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

4) **a)** Soit n un entier naturel. En posant $B_0 = B$, on a

$$AB_{n+1} = s(A)s(B_n) = \frac{2}{3}AB_n.$$

b) Ainsi, la suite $(AB_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$. On en déduit que pour tout entier naturel n,
$AB_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times AB_0 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times AB$ avec

$$AB = |z_B - z_A| = \left|(7 + \frac{7}{2}i) - (1 - i)\right| = \left|6 + \frac{9}{2}i\right| = \frac{3}{2}|4 + 3i| = \frac{3}{2}\sqrt{4^2 + 3^2} = \frac{3}{2} \times 5 = \frac{15}{2}.$$

Mais alors,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ AB_n = \frac{15}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.}$$

Soit n un entier naturel. En notant $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 10^{-2},

$$\begin{aligned}
B_n \in \mathscr{C} \Leftrightarrow AB_n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{15}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{10^2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq \frac{15}{2} \times 100 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 750 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \geq \ln(750) \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{2}\right) \geq \ln(750) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(750)}{\ln(3/2)} \text{ (car } \ln(3/2) > 0) \\
&\Leftrightarrow n \geq 16,3\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geq 17 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le point } B_n \text{ est dans le cercle de centre } A \text{ et de rayon } 10^{-2} \text{ à partir du rang } 17.}$$

c) Puisque s est une similitude directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, pour tout entier naturel non nul on a $B_n \neq A$ et

$$\left(\overrightarrow{AB_n}, \overrightarrow{AB_{n+1}}\right) = \left(\overrightarrow{AB_n}, \overrightarrow{As(B_n)}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}\right) = (n-1)\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

- Puisque $\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_1}\right) = 0 = (1-1)\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$, le résultat est vrai pour $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}\right) = (n-1)\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. Alors, d'après la relation de CHASLES,

$$\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_{n+1}}\right) = \left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}\right) + \left(\overrightarrow{AB_n}, \overrightarrow{AB_{n+1}}\right) = (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = ((n+1)-1)\frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}\right) = (n-1)\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Soit de nouveau n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
A,\ B_1 \text{ et } B_n \text{ alignés} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}\right) = 0 \quad [\pi] \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe un entier relatif } k \text{ tel que } (n-1)\frac{\pi}{2} = k\pi \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe un entier relatif } k \text{ tel que } n - 1 = 2k \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe un entier relatif } k \text{ tel que } n = 2k + 1 \\
&\Leftrightarrow n \text{ impair.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les entiers naturels non nuls } n \text{ tels que } A,\ B_1 \text{ et } B_n \text{ alignés sont les entiers impairs.}}$$

