BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Centres étrangers

EXERCICE 1

1) **Vrai**

2) **Faux**

3) **Vrai**

4) **Faux**

5) **Faux**

6) **Faux**

7) **Vrai**

8) **Vrai**

Explications.

1) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, -3, 4)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles ou encore les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés et donc que ces points définissent un plan et un seul.

2) $x_C - 2y_C + z_C + 1 = 0 + 4 + 3 + 1 = 8 \neq 0$. Donc $C \notin \mathscr{P}$ et par suite $(AC) \not\subset \mathscr{P}$.

3) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AD}(-1, 0, -1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et D définissent un plan et un seul.
• $x_A + 8y_A - z_A - 11 = 2 + 8 + 1 - 11 = 0$ et donc A appartient au plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$.
• $x_B + 8y_B - z_B - 11 = -1 + 16 - 4 - 11 = 0$ et donc B appartient au plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$.
• $x_D + 8y_D - z_D - 11 = 1 + 8 + 2 - 11 = 0$ et donc D appartient au plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$.
Le plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$ est bien le plan (ABD).

4) S'il existe un réel k tel que $x_C = 2k$, on a $2k = 0$ puis $k = 0$. Mais alors $2 + 3k = 2 \neq -2 = y_C$. Donc le point C n'appartient pas à la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{array}\right.$ et cette droite n'est pas la droite (AC).

5) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(1, 3, -5)$. De plus

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (-3) \times 1 + 1 \times 3 + 5 \times (-5) = -25 \neq 0.$$

Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales.

6) $d(C, \mathscr{P}) = \dfrac{|x_C - 2y_C + z_C + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{|4 + 3 + 1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{8\sqrt{6}}{6} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3} \neq 4\sqrt{6}$.

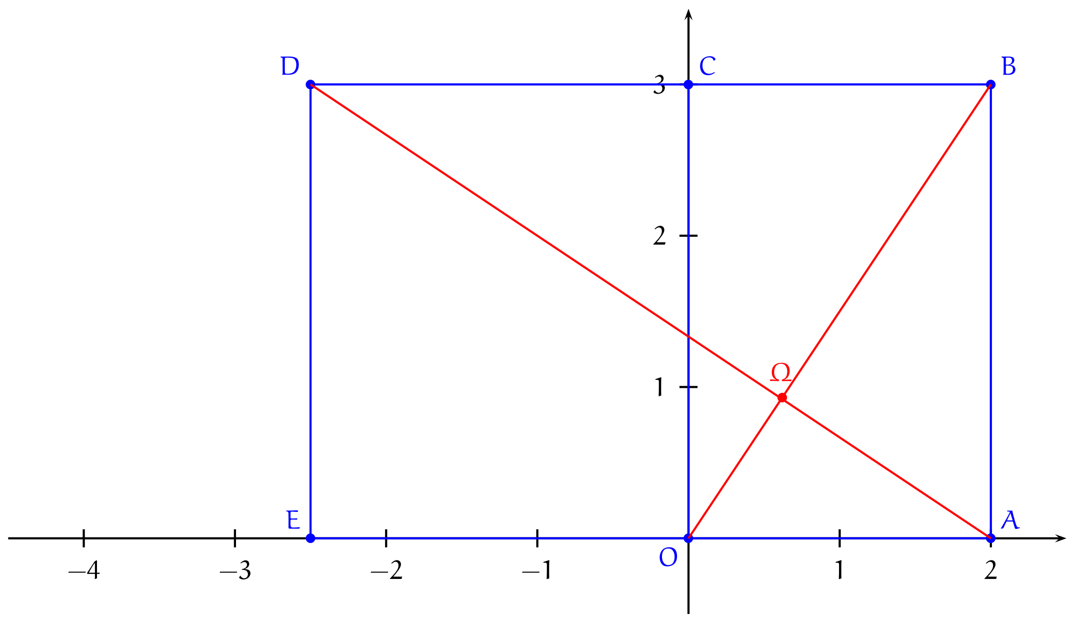
7) $d(D,\mathscr{P}) = \dfrac{|x_D - 2y_D + z_D + 1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \dfrac{|1-2-2+1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Ainsi, la distance du centre de la sphère au plan $\mathscr{P}$ est égale au rayon de cette sphère et on sait que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à cette sphère.

8) D'une part, $x_E - 2y_E + z_E + 1 = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{3} + 1 = 0$ et donc le point E appartient au plan $\mathscr{P}$.

D'autre part, un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,-2,1)$. Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$. On a donc $\overrightarrow{EC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{n}$. Par suite le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est bien colinéaire au vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et finalement le point E est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 2

1)



2) $b - c = (2+3i) - (3i) = 2 = a - 0$ et donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$. Ainsi, le quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme. De plus, $A \in (Ox)$ et $C \in (Oy)$. Donc l'angle $\widehat{AOC}$ est droit. Puisque le parallélogramme $OABC$ a un angle droit, ce parallélogramme est un rectangle.

De même, $a - e = 2 - \left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{9}{2}$ et $b - d = (2+3i) - \left(-\dfrac{5}{2} + 3i\right) = \dfrac{9}{2}$. Donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DB}$ et le quadrilatère $ABDE$ est un parallélogramme. De plus, le parallélogramme $ABDE$ est un rectangle puisque l'angle $\widehat{OAB}$ est droit.

- $OA = |a| = |2| = 2$ et $OC = |c| = |3i| = 3$. Donc $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{3}{2}$.
- $EA = |a - e| = \left|\dfrac{9}{2}\right| = \dfrac{9}{2}$ et $AB = |b - a| = |3i| = 3$. Donc, $\dfrac{EA}{AB} = \dfrac{3}{2}$.

On a donc $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{EA}{AB}$ et par suite

$$\boxed{\text{les quadrilatères } OABC \text{ et } ABDE \text{ sont deux rectangles semblables.}}$$

3) Etude d'une similitude transformant $OABC$ en $ABDE$

a) Soient α et β deux nombres complexes puis s la similitude directe d'expression complexe $z' = \alpha z + \beta$.

$$s(O) = A \text{ et } s(A) = B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0\alpha + \beta = a \\ a\alpha + \beta = b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 2 \\ 2\alpha + 2 = 2 + 3i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{3i}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'expression complexe de la similitude directe transformant } O \text{ en } A \text{ et } A \text{ en } B \text{ est } z' = \dfrac{3i}{2}z + 2.}$$

b) $b' = \dfrac{3i}{2}(2+3i) + 2 = -\dfrac{9}{2} + 2 + 3i = -\dfrac{5}{2} + 3i = d$ et donc $s(B) = D$.

$c' = \dfrac{3i}{2}(3i) + 2 = 2 - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{5}{2} = e$ et donc $s(C) = E$.

En résumé, $s(O) = A$, $s(A) = B$, $s(B) = D$ et $s(C) = E$. Donc, $s(OABC) = ABDE$.

$$\boxed{\text{La similitude } s \text{ transforme } OABC \text{ en } ABDE.}$$

c) L'angle de s est un argument de $\dfrac{3i}{2}$ c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{s \text{ est une similitude d'angle } \dfrac{\pi}{2}.}$$

d) Les points O, A, B ne sont pas invariants par s. Donc Ω est distinct de chacun de ces points. De même, si $\Omega = D$, on en déduit que $B = s^{-1}(D) = s^{-1}(\Omega) = \Omega$ ce qui n'est pas. Donc Ω n'est pas non plus le point D.
On a $s \circ s(O) = s(s(O)) = s(A) = B$ et $s \circ s(A) = s(s(A)) = s(B) = D$. Mais $s \circ s$ est une similitude d'angle $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$. Donc, $\left(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = \pi\ [2\pi]$ et de même $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}\right) = \pi\ [2\pi]$. Par suite, les points Ω, O et B sont alignés et de même les points Ω, A et D sont alignés ou encore

$$\boxed{\Omega \text{ est le point d'intersection des droites } (OB) \text{ et } (AD).}$$

4) Etude d'une similitude indirecte transformant $OABC$ en $BAED$

a) Soient α et β deux nombres complexes puis s' la similitude indirecte d'expression complexe $z' = \alpha\overline{z} + \beta$.

$$s(O) = B \text{ et } s(A) = A \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0\alpha + \beta = b \\ \overline{a}\alpha + \beta = a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 2 + 3i \\ 2\alpha + 2 + 3i = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 2 \\ \alpha = -\dfrac{3i}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'expression complexe de la similitude indirecte transformant } O \text{ en } B \text{ et } A \text{ en } A \text{ est } z' = -\dfrac{3i}{2}\overline{z} + 2 + 3i.}$$

b) $b' = -\dfrac{3i}{2}(2 - 3i) + 2 + 3i = -3i - \dfrac{9}{2} + 2 + 3i = -\dfrac{5}{2} = e$ et donc $s'(B) = E$.
$c' = -\dfrac{3i}{2}(-3i) + 2 + 3i = -\dfrac{9}{2} + 2 + 3i = -\dfrac{5}{2} + 3i = d$ et donc $s(C) = D$.
En résumé, $s(O) = B$, $s(A) = A$, $s(B) = E$ et $s(C) = D$. Donc, $s(OABC) = BAED$.

$$\boxed{\text{La similitude } s \text{ transforme } OABC \text{ en } ABDE.}$$

c) Soit s_1 la réflexion d'axe (OA). L'expression complexe de s_1 est $z' = \overline{z}$.
Soit alors s_2 la similitude directe d'expression complexe $z' = -\dfrac{3i}{2}z + 2 + 3i$. L'expression complexe de $s_2 \circ s_1$ est $z' = -\dfrac{3i}{2}\overline{z} + 2 + 3i$ et donc on a $s_2 \circ s_1 = s'$.

Eléments caractéristiques de s_2.

- Le rapport de s_2 est $k = \left|-\dfrac{3i}{2}\right| = \dfrac{3}{2}$.
- L'angle de s_2 est $\theta = \arg\left(\dfrac{-3i}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- L'affixe ω' du centre Ω' de s_2 est caractérisée par $-\dfrac{3i}{2}\omega' + 2 + 3i = \omega'$. Or

$$-\frac{3i}{2}\omega' + 2 + 3i = \omega' \Leftrightarrow \left(1 + \frac{3i}{2}\right)\omega' = 2 + 3i \Leftrightarrow \omega' = \frac{2 + 3i}{1 + \dfrac{3i}{2}} \Leftrightarrow \omega' = \frac{(2 + 3i)\left(1 - \dfrac{3i}{2}\right)}{\left(1 + \dfrac{3i}{2}\right)\left(1 - \dfrac{3i}{2}\right)}$$

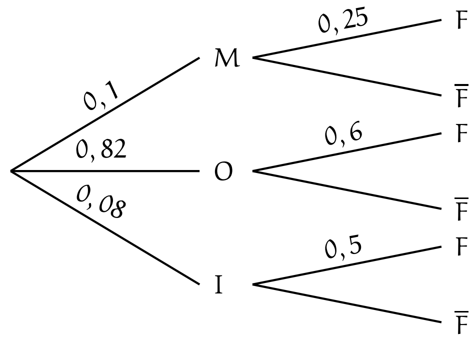
$$\Leftrightarrow \omega' = \frac{1}{1^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2}\left(2 - 3i + 3i + \frac{9}{2}\right) \Leftrightarrow \omega' = \frac{4}{13} \times \frac{13}{2} \Leftrightarrow \omega' = 2 \Leftrightarrow \omega' = a.$$

$$\boxed{s' \text{ est la composée de la réflexion d'axe } (OA) \text{ suivie de la similitude directe de rapport } \dfrac{3}{2}, \text{ d'angle } -\dfrac{\pi}{2} \text{ et de centre } A.}$$

EXERCICE 3

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre.



2) **a)** $p(M) = 1 - p(I) - p(O) = 1 - 0,08 - 0,82 = 0,1$.

$$\boxed{p(M) = 0,1.}$$

b) La probabilité demandée est $p(M \cap F)$. Or

$$p(M \cap F) = p(M) \times p_M(F) = 0,1 \times 0,25 = 0,025.$$

$$\boxed{p(M \cap F) = 0,025.}$$

c) La probabilité demandée est $p(F)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(F) = p(M \cap F) + p(O \cap F) + p(I \cap F) = p(M) \times p_M(F) + p(O) \times p_O(F) + p(I) \times p_I(F) = \\ 0,1 \times 0,25 + 0,82 \times 0,6 + 0,08 \times 0,5 = 0,025 + 0,492 + 0,04 = 0,557.$$

$$\boxed{p(F) = 0,557.}$$

Partie B

1) La probabilité demandée est $p(A \cap B)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire que $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$ et donc

$$p(A \cap B) = p(B) - p(\overline{A} \cap B) = 0,04 - 0,003 = 0,037.$$

$$\boxed{p(A \cap B) = 0,037.}$$

2) La probabilité demandée est $p(A)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = 0,037 + 0,002 = 0,039.$$

$$\boxed{p(A) = 0,039.}$$

3) La probabilité demandée est $p_A(B)$.

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,037}{0,039} = 0,95 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$\boxed{p_A(B) = 0,95 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

EXERCICE 4

Partie A. Restitution organisée de connaissances

1) Pour tout réel $x > 1$,

$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}/\ln(x)}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)} = +\infty$. Mais alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\ln(x)}/\ln(x)} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.}$$

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.}$$

Partie B. Etude d'une fonction f

1) a) La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, on a

$$u'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$$

b) $u(1) = 1^3 - 1 + 2\ln(1) = 1 - 1 + 0 = 0$.
Soit alors x un réel strictement positif. Comme la fonction u est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que
- si $x < 1$, $u(x) < u(1)$ ou encore $u(x) < 0$,
- si $x > 1$, $u(x) > u(1)$ ou encore $u(x) > 0$.

On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est strictement négative sur }]0, 1[, \text{ strictement positive sur }]1, +\infty[\text{ et s'annule en } 1.}$$

2) Etude de la fonction f

a) Limite en 0. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) \times \frac{1}{x^2} = -\infty$$

et donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} -\frac{\ln(x)}{x^2} = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = 0$ et finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty.}$$

Limite en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.}$$

b) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$f'(x)=1-\left(\ln(x)\times\frac{1}{x^2}\right)'=1-\left(\frac{1}{x}\times\frac{1}{x^2}+\ln(x)\times\frac{-2}{x^3}\right)=\frac{x^3-1+2\ln(x)}{x^3}=\frac{u(x)}{x^3}.$$

Pour tout réel $x>0$, on a $x^3>0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$ pour tout réel $x>0$. Ce signe a été étudié à la question 1)b) et on en déduit le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

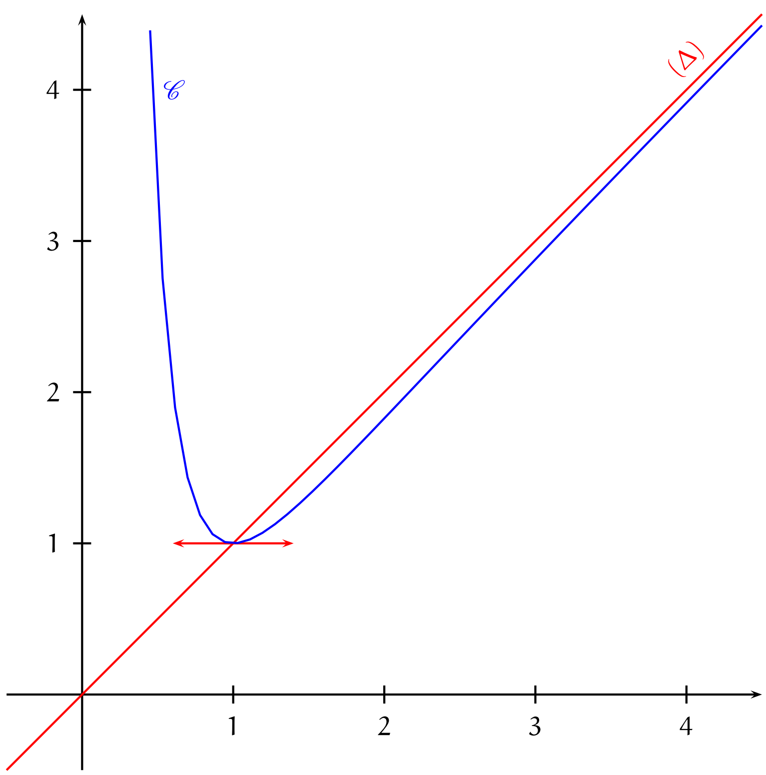
3) Eléments graphiques et tracés

a) Pour tout réel $x>0$, $f(x)-x=-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$. Mais alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y=x \text{ est asymptote à la courbe } \mathscr{C} \text{ en } +\infty.}$$

b) La position relative de $\mathscr{C}$ est (Δ) est donnée par le signe de $f(x)-x$. Or, pour tout réel $x>0$, $f(x)-x=-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ est du signe de $-\ln(x)$ et donc $f(x)-x>0$ pour $x\in]0,1[$ et $f(x)-x<0$ pour $x\in]1,+\infty[$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de (Δ) sur $]0,1[$ et strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$. Enfin, $\mathscr{C}$ et (Δ) se coupent en leur point d'abscisse 1 c'est-à-dire au point de coordonnées $(1,1)$.

c) Graphe.



Partie C. Calculs d'aires

1) a) Soit $\alpha > 1$. D'après la question B - 3)b), la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite (Δ) sur $[1, \alpha]$. Puisque f est continue sur $[1, \alpha]$, on a

$$\mathscr{A}(\alpha) = \int_1^\alpha (x - f(x))\,dx = \int_1^\alpha \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx.$$

Calculons alors $\mathscr{A}(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties.
Les deux fonctions $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto -\frac{1}{x}$ sont définies et dérivables sur le segment $[1, \alpha]$ et pour tout réel x de $[1, \alpha]$, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur le segment $[1, \alpha]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et en posant

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x) & v(x) = -\dfrac{1}{x} \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\alpha) &= \int_1^\alpha \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \left[\ln(x) \times \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right)\,dx = -\frac{\ln(\alpha)}{\alpha} + \frac{\ln(1)}{1} + \int_1^\alpha \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{\ln(\alpha)}{\alpha} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\alpha = -\frac{\ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1 = 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \alpha > 1,\ \mathscr{A}(\alpha) = 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}.}$$

b) $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}(\alpha) = 1$.

$$\boxed{\ell = 1.}$$

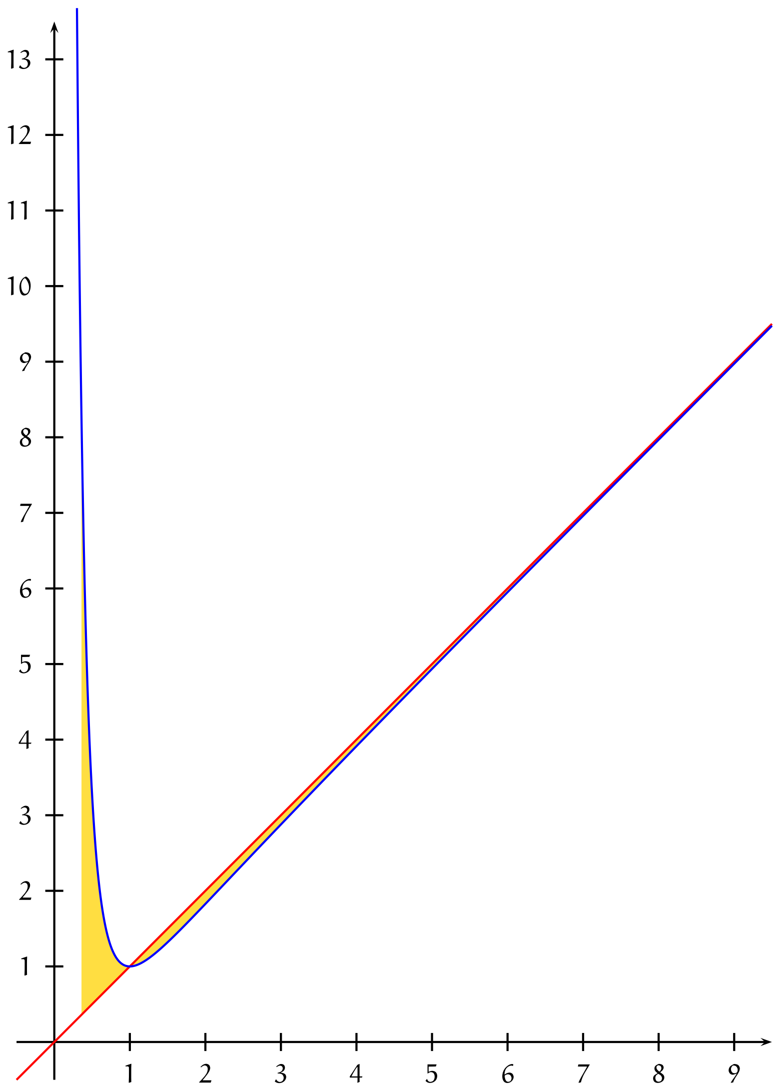
2) D'après la question B - 3)b), la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite (Δ) sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Puisque f est continue sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, on a

$$\mathscr{A}\left(\frac{1}{e}\right) = \int_{1/e}^1 (f(x) - x)\,dx = -\int_{1/e}^1 \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx.$$

Le calcul de la question 1)a) peut alors être réutilisé avec $\alpha = \frac{1}{e}$ et après deux changements de signe, on obtient

$$\mathscr{A}\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{\ln(1/e)}{1/e} - \frac{1}{1/e} = 1 - \frac{-1}{1/e} - \frac{1}{1/e} = 1 + e - e = 1 = \ell.$$

$$\boxed{\ell = \mathscr{A}\left(\frac{1}{e}\right) = 1.}$$


13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

