Session 2008

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

2) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E').

3) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

4) En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ d'unité 1 cm.

1) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variation de f.

4) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

5) Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Déterminer l'aire A de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2.

EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1) Vérifier que le couple (-7 ; -3) est solution de (E).

2) Résoudre alors l'équation (E).

3) En déduire le couple d'entiers relatifs $(u; v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la faœn suivante :
– on calcule 11x+8 ;
– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.
x est alors « code »par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11.
$11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25$ (modulo 26) ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26.
Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1) Coder la lettre W.

2) Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a) Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

$$11x \equiv j \text{ (modulo 26) équivaut à } x \equiv 19j \text{ (modulo 26).}$$

b) En déduire un procédé de décodage.

c) Décoder la lettre W.

EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ;
une réponse inexacte enlève 0,25 point ;
l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

1) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $\left\{\begin{array}{r} 2x-6y+2z-7=0 \\ -x+3y-z+5=0 \end{array}\right.$ est :

Réponse A : l'ensemble vide	**Réponse B :** une droite
Réponse C : un plan	**Réponse D :** réduit à un point

2) Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & -1+t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z & = & 2-3t \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t' \\ y & = & -2-t' \ (t' \in \mathbb{R}) \\ z & = & 4+2t' \end{array}\right. \text{ sont :}$$

Réponse A : parallèles et distinctes	**Réponse B :** confondues
Réponse C : sécantes	**Réponse D :** non coplanaires

3) La distance du point $A(1;-2;1)$ au plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ est égale à :

Réponse A : $\dfrac{3}{11}$	**Réponse B :** $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$
Réponse C : $\dfrac{1}{2}$	**Réponse D :** $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$

4) Le projeté orthogonal du point $B(1;6;0)$ sur le plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :

Réponse A : $(\ 3\ ;\ 1\ ;\ 5\ )$	**Réponse B :** $(\ 2\ ;\ 3\ ;\ 1\ )$
Réponse C : $(\ 3\ ;\ 0\ ;\ 2\ )$	**Réponse D :** $(\ -2\ ;\ 3\ ;\ -6\ )$

EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

La feuille **annexe** donnée portera les constructions demandées au cours de l'exercice.
Cette feuille est à rendre avec la copie.
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, le point A a pour affixe i.
On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq i$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z-i}.$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M.

1) Un exemple.
On considère un point K d'affixe $1+i$.

a) Placer le point K.

b) Déterminer l'affixe du point K' image de K par f.

c) Placer le point K'.

2) Des points pour lesquels le problème ne se pose pas.

a) On considère le point L d'affixe $\frac{i}{2}$. Déterminer son image L' par f. Que remarque-t-on ?

b) Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.
Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3) Un procédé de construction.

On nomme G l'isobarycentre des points A, M, et M', et g l'affixe de G.

a) Vérifier l'égalité $g = \dfrac{1}{3(z-i)}$.

b) En déduire que si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3r}$.

c) Démontrer que $\arg g = -\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AM}\right)$.

d) Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
On nomme D' l'image de D par f. Déduire des questions précédentes la construction du point D' et la réaliser sur la **figure annexe à rendre avec la copie**.

ANNEXE

A rendre avec la copie

EXERCICE 4

Sur la figure ci-dessous le segment $[OI]$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OI}$ est partagé en six segments d'égale longueur.