BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Antilles Guyanne

EXERCICE 1

Partie A

1) Pour $a \in \mathbb{R}$ donné, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$. Ici $a = -2$ et donc

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } (E') \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto ke^{-2x},\ k \in \mathbb{R}.}$$

2) En particulier, quand $k = \dfrac{9}{2}$ on obtient

$$\boxed{\text{la fonction } k\ :\ x \mapsto \frac{9}{2}e^{-2x} \text{ est solution de l'équation } (E') \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

3) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$g'(x) + 2g(x) = -3 \times (-3e^{-3x}) + 2 \times (-3e^{-3x}) = 9e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x}.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } g\ :\ x \mapsto -3e^{-3x} \text{ est solution de l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

4) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$f'(x) + 2f(x) = (g + h)'(x) + 2(g + h)(x) = (g'(x) + 2g(x)) + (h'(x) + 2h(x)) = 3e^{-3x} + 0 = 3e^{-3x},$$

et donc

$$\boxed{f \text{ est solution de l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Partie B

1) Pour tout réel x, on a $3e^{-2x} \neq 0$ et donc

$$f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = 3e^{-2x}\frac{\frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}}{3e^{-2x}} = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-3x+2x}\right) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right).$$

2) • **Limite en $+\infty$.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = \lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{9}{2} \times 0 - 3 \times 0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

• **Limite en $-\infty$.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{-2x} = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{2} - e^{-x} = -\infty$.

En résumé, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{2} - e^{-x} = -\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{9}{2} \times (-2e^{-2x}) - 3 \times (-3e^{-3x}) = -9e^{-2x} + 9e^{-3x} = 9e^{-3x}(-e^{x} + 1).$$

Pour tout réel x, $9e^{-3x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $-e^{x} + 1$. Or

- si $x > 0$, $e^{x} > 1$ et donc $f'(x) < 0$,
- si $x = 0$, $e^{x} = 1$ et donc $f'(x) = 0$,
- si $x < 0$, $e^{x} < 1$ et donc $f'(x) > 0$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	0

$$f(0) = \frac{9}{2}e^{0} - 3e^{0} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

4) • $f(0) = \frac{3}{2}$ et donc $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe (Oy) au point de coordonnées $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

• Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe (Ox) sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = 0 \Leftrightarrow 3e^{-3x}\left(\frac{3}{2}e^{x} - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{x} - 1 = 0 \text{ (car } 3e^{-3x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow e^{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

$\mathscr{C}_f$ coupe l'axe (Ox) au point de coordonnées $\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right), 0\right)$.

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ coupe l'axe } (Ox) \text{ au point de coordonnées } \left(\ln\left(\frac{2}{3}\right), 0\right) \text{ et l'axe } (Oy) \text{ au point de coordonnées } \left(0, \frac{3}{2}\right).}$$

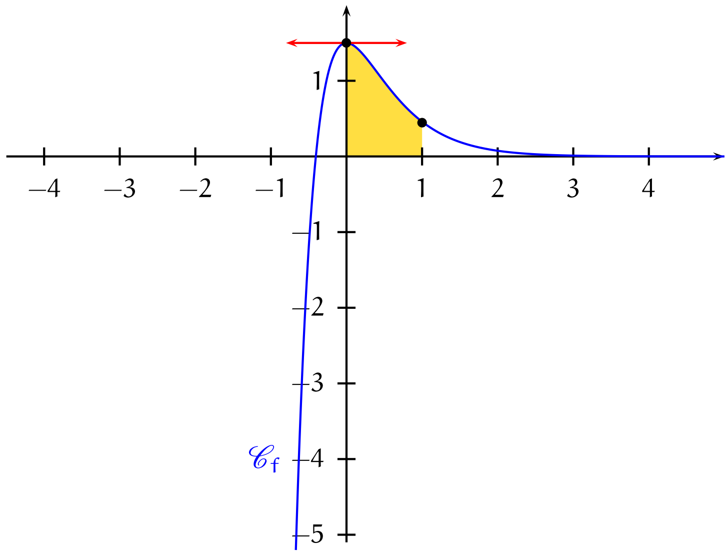
5) $f(1) = \frac{9}{2}e^{-2} - 3e^{-3} = 0,459\ldots$
Voir graphique page suivante.

6) L'unité d'aire est égale à 1 cm^2.
La fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$. On en déduit que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et en particulier sur l'intervalle $[0, 1]$. De plus, f est continue sur cet intervalle et donc $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Donc

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\ dx = \left[\frac{9}{2} \times \frac{e^{-2x}}{-2} - 3 \times \frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^1 = \left[-\frac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x}\right]_0^1$$
$$= \left(-\frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3}\right) - \left(-\frac{9}{4} + 1\right) = \frac{5}{4} - \frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{5}{4} - \frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3} = 0,995\ldots \text{ cm}^2.}$$



EXERCICE 2

Partie A

1) $11 \times (-7) - 26 \times (-3) = -77 + 78 = 1$. Donc

$$\boxed{\text{le couple } (-7, -3) \text{ est solution de } (E).}$$

2) La question 1) et le théorème de BÉZOUT permettent d'affirmer que 11 et 26 sont deux entiers premiers entre eux.
Soit alors (x, y) un couple d'entiers relatifs.
Si le couple (x, y) est solution de (E), on a $11x - 26y = 1 = 11(-7) - 26(-3)$ et donc $11(x + 7) = 26(y + 3)$ $(*)$.
Mais alors 26 divise l'entier $11(x + 7)$ et puisque 26 est premier à 11, 26 divise $x + 7$. On en déduit qu'il existe un entier relatif k tel que $x + 7 = 26k$ ou encore $x = -7 + 26k$. DE même, il existe un entier relatif k' tel que $y = -3 + 11k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = -7 + 26k$ et $y = -3 + 11k'$. Alors

$$11x - 26y = 1 \Leftrightarrow 11(-7 + 26k) - 26(-3 + 11k') = 1 \Leftrightarrow 1 + 11 \times 26(k - k') = 1 \Leftrightarrow k = k'.$$

Finalement,

$$\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sont les couples de la forme } (-7 + 26k, -11 + 11k),\ k \in \mathbb{Z}.}$$

3) Soit k un entier relatif.

$$0 \leqslant -7 + 26k \leqslant 25 \Leftrightarrow 7 \leqslant 26k \leqslant 32 \Leftrightarrow \frac{7}{26} \leqslant k \leqslant \frac{32}{26} \Leftrightarrow k = 1.$$

Pour $k = 1$, on obtient $x = -7 + 26 = 19$ et $y = -3 + 11 = 8$.

$$\boxed{(u, v) = (19, 8).}$$

Partie B

1) • W est associé au nombre $x = 22$.
• $11x + 8 = 11 \times 22 + 8 = 250$.
• $250 = 16 + 234 = 16 + 26 \times 9$. Comme $0 \leqslant 16 \leqslant 25$, on a donc $y = 16$ ce qui correspond à la lettre Q.

$$\boxed{\text{La lettre W est codée par la lettre Q.}}$$

2) a) Soient x et j deux entiers relatifs.
Si $11x \equiv j$ (modulo 26), il existe un entier relatif k tel que $11x = j + 26k$. Mais alors $11 \times 19 \times x = 19j + 19 \times 26k$. Mais d'après la partie A, on a $11 \times 19 = 1 + 8 \times 26$ et donc $11 \times 19 \equiv 1$ (modulo 26) et d'autre part, $19 \times 26k \equiv 0$ (modulo 26).
L'égalité $11 \times 19 \times x = 19j + 19 \times 26k$ fournit donc $x \equiv 19j$ (modulo 26).

Réciproquement, si $x \equiv 19j$ (modulo 26), il existe un entier relatif k tel que $x = 19j + 26k$ et donc tel que
$11x = 11 \times 19j + 11 \times 26k$. On a toujours $11 \times 19 \equiv 1$ (modulo 26) et $11 \times 26k \equiv 0$ (modulo 26).
L'égalité $11x = 11 \times 19j + 11 \times 26k$ fournit donc $11x \equiv j$ (modulo 26).

$$\boxed{\text{Pour tous entiers relatifs } x \text{ et } j,\ 11x \equiv j \text{ (modulo 26) équivaut à } x \equiv 19j \text{ (modulo 26).}}$$

b) Soit x un entier compris entre 0 et 25 associé à une certaine lettre comprise entre A et Z et soit y l'entier compris entre 0 et 25 codant x. On a $11x + 8 \equiv y$ (modulo 26). D'après la question précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned} 11x + 8 \equiv y \text{ (modulo 26)} &\Leftrightarrow 11x \equiv y - 8 \text{ (modulo 26)} \Leftrightarrow x \equiv 19(y - 8) \text{ (modulo 26)} \\ &\Leftrightarrow x \equiv 19y - 152 \text{ (modulo 26)}. \end{aligned}$$

Comme de plus $0 \leqslant x \leqslant 25$,

$$\boxed{x \text{ est le reste de la division euclidienne de } 19y - 152 \text{ par } 26.}$$

c) La lettre W est associée à $y = 22$. On a $19y - 152 = 266 = 26 \times 10 + 6$. Le reste de la division euclidienne de $19y - 152$ est donc $x = 6$ qui est associé à la lettre G.

$$\boxed{\text{La lettre W code la lettre G.}}$$

EXERCICE 3

1)

1)	**A**
2)	**C**
3)	**B**
4)	**C**

Explications.

1) Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble considéré. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 6y + 2z - 7 = 0 \\ -x + 3y - z + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 3y + z = \dfrac{7}{2} \\ x - 3y + z = 5 \end{array}\right.$$

Comme $\dfrac{7}{2} \neq 5$, $\mathscr{E} = \varnothing$.

2) Notons (D) et (D') les droites considérées. (D) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(-1, 1, -3)$ et (D') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}'(1, -1, 2)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles et donc sont soit sécantes, soit non coplanaires. Déterminons alors l'intersection de (D) et (D'). Soient $M(1 - t, -1 + t, 2 - 3t)$ et $M'(2 + t', -2 - t', 4 + 2t')$, $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$, des points de (D) et (D') respectivement.

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - t = 2 + t' \\ -1 + t = -2 - t' \\ 2 - 3t = 4 + 2t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = -t - 1 \\ -1 + t = -2 - (-t - 1) \\ 2 - 3t = 4 + 2(-t - 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = -t - 1 \\ 0t = 0 \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ t' = -1 \end{array}\right.$$

Quand $t = 0$ et $t' = -1$, on obtient un point commun $A(1, -1, 2)$ et les droites (D) et (D') sont sécantes en A.

3) Notons (P) le plan considéré.

$$d(A, (P)) = \frac{|-1 + 3 \times (-2) - 1 + 5|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

4) Notons H le projeté orthogonal de B sur (P) puis (x, y, z) les coordonnées de H.
Un vecteur normal à (P) est le vecteur $\overrightarrow{n}(-1, 3, -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$. Par suite, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{n}$. Ceci fournit $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - k \\ y = 6 + 3k \\ z = -k \end{array}\right.$. Maintenant

$$H \in (P) \Leftrightarrow -(1 - k) + 3(6 + 3k) - (-k) + 5 = 0 \Leftrightarrow 11k + 22 = 0 \Leftrightarrow k = -2.$$

Pour $k = -2$, on obtient les coordonnées de H : $(3, 0, 2)$.

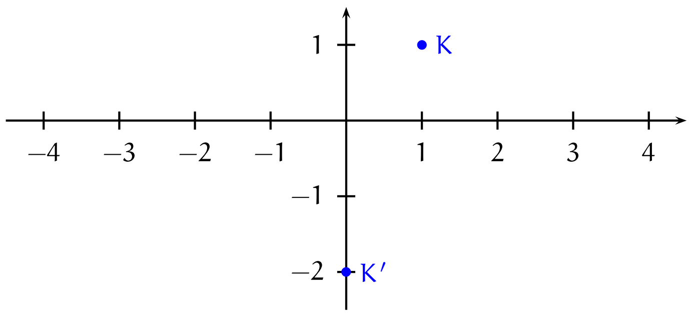
EXERCICE 4

1) a) voir plus loin

b) $z_{K'} = \dfrac{-(1+i)^2}{(1+i)-i} = \dfrac{-(1+2i-1)}{1} = -2i.$

$$\boxed{z_{K'} = -2i.}$$

a) et c)



2) **a)** $z_{L'} = \dfrac{-\left(\dfrac{i}{2}\right)^2}{\dfrac{i}{2}-i} = \dfrac{1/4}{-i/2} = \dfrac{1}{-2i} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{i}{(-i)i} = \dfrac{i}{2}.$

$$\boxed{z_{L'} = \frac{i}{2}.}$$

En particulier $L' = L$ et donc le point L est invariant par f.

b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{-z^2}{z-i} = z \Leftrightarrow -z^2 = z(z-i) \Leftrightarrow 2z^2 - iz = 0 \Leftrightarrow z(2z-i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = \frac{i}{2}.$$

Comme 0 et $\dfrac{i}{2}$ appartiennent à $\mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\boxed{f \text{ admet exactement deux points invariants, les points } O \text{ et } L \text{ d'affixes respectives } 0 \text{ et } \frac{i}{2}.}$$

3) Un procédé de construction.

a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$g = \frac{1}{3}(z_A + z + z') = \frac{1}{3}\left(i + z - \frac{z^2}{z-i}\right) = \frac{(z+i)(z-i)-z^2}{3(z-i)} = \frac{z^2 - i^2 - z^2}{3(z-i)} = \frac{1}{3(z-i)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout complexe } z \in \mathbb{C} \setminus \{i\},\ g = \frac{1}{3(z-i)}.}$$

b) Soient r un réel strictement positif et M un point du cercle de centre A et de rayon r. Alors $|z-i| = r$ et en particulier, $z \neq i$. De plus,

$$OG = |g| = \left|\frac{1}{3(z-i)}\right| = \frac{1}{3|z-i|} = \frac{1}{3r}.$$

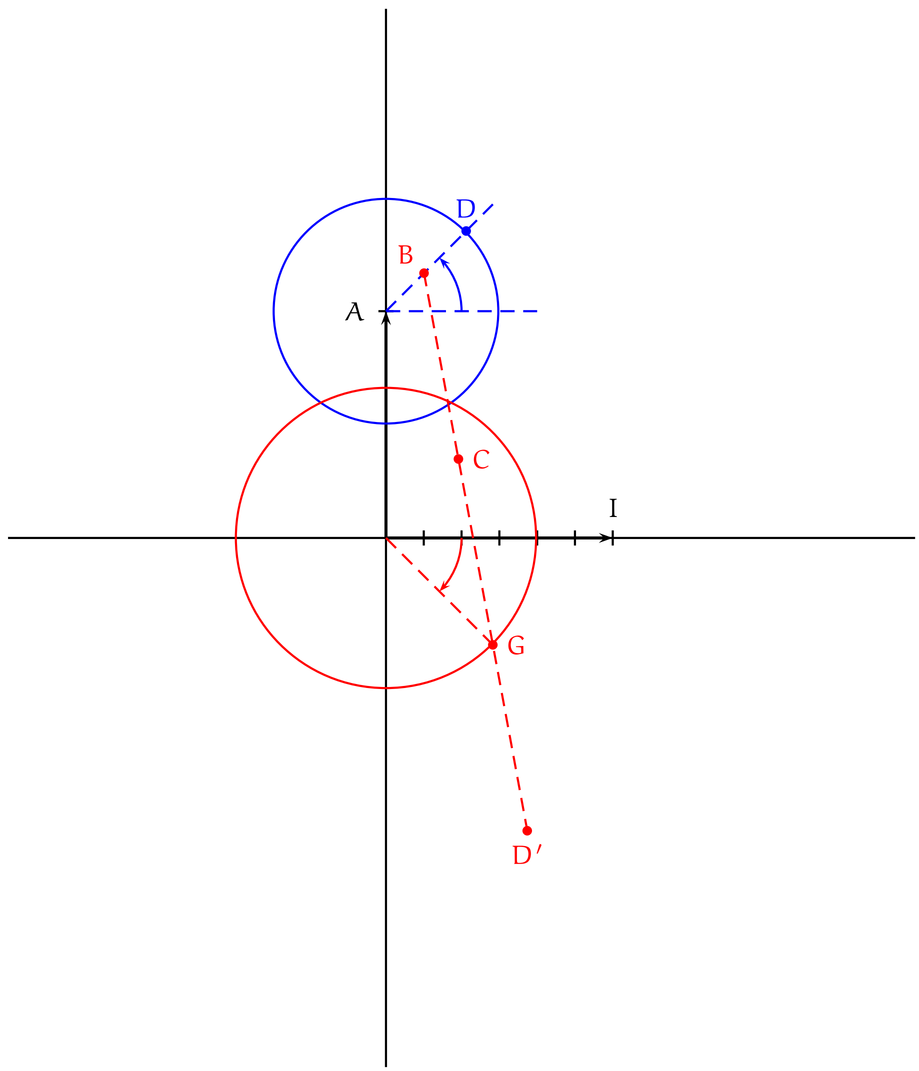
Donc G appartient au cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{3r}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$\arg(g) = \arg\left(\frac{1}{3(z-i)}\right) = -\arg(3(z-i)) = -\arg(z-i) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right).$$

$$\boxed{\arg(g) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right).}$$

d) Ici $r = \frac{1}{2}$. On construit alors G. G est sur le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{3r} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ce qui correspond à 4 graduations. D'autre part, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OG}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD}\right)$.



Il reste à construire le point D' tel que G soit le centre de gravité du triangle ADD'. On note B le milieu du segment[AD] puis C le milieu du segment [BG]. On sait alors que $\overrightarrow{BD'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$ ou encore $\overrightarrow{GD'} = \overrightarrow{CG}$ ou enfin D' est le symétrique de C par rapport à G.

