BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

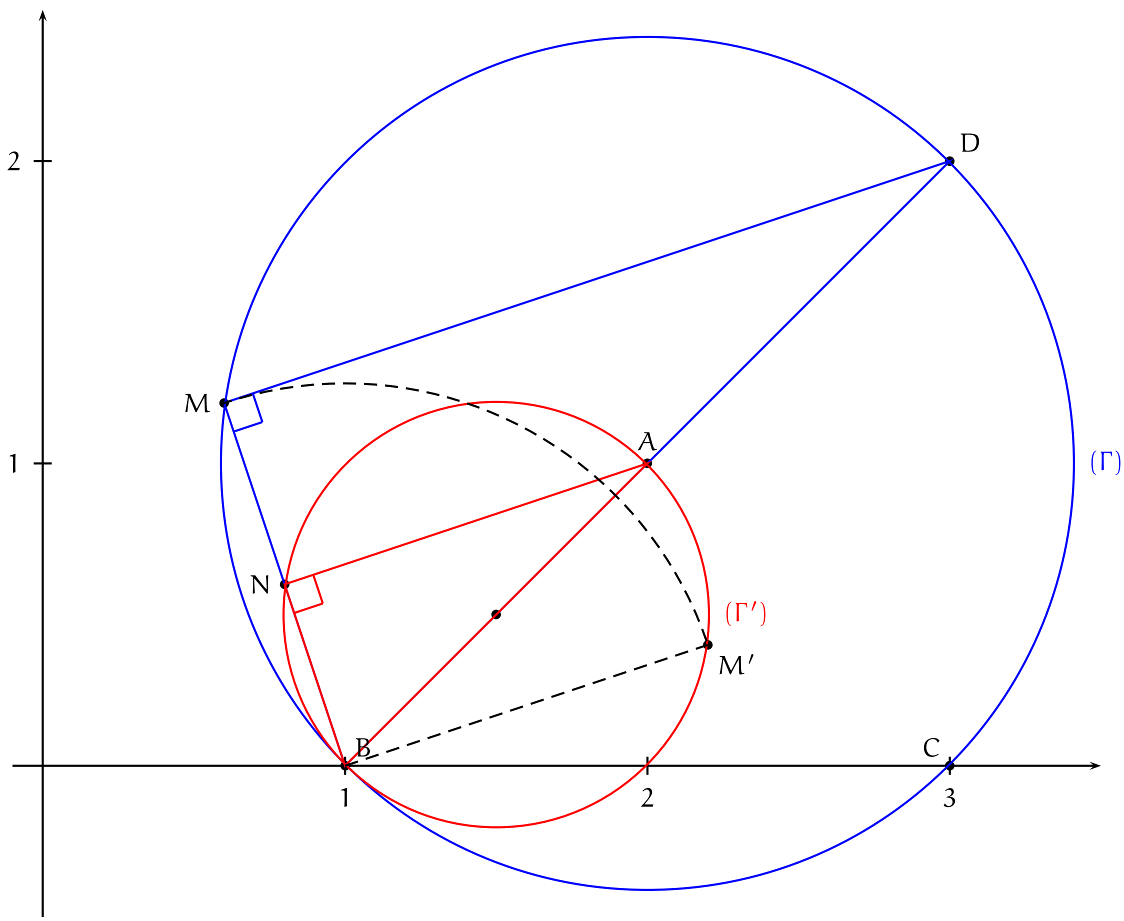
- Série S -

Enseignement Obligatoire

Rochambeau

EXERCICE 1

1.



2. a) Une équation du cercle (Γ) est $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$. Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in (O, \overrightarrow{u}) \cap (\Gamma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ (x-2)^2 + (0-1)^2 = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ (x-2)^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x - 2 = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x - 2 = -1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Les points d'intersection de } (\Gamma) \text{ et de l'axe } (O, \overrightarrow{u}) \text{ sont les points B et C d'affixes } z_B = 1 \text{ et } z_C = 3.}$$

b) D est le symétrique de B par rapport à A et donc $\dfrac{z_B + z_D}{2} = z_A$ ou encore $z_D = 2z_A - z_B = 2(2+i) - 1 = 3 + 2i$.

$$\boxed{z_D = 3 + 2i.}$$

3. a)

$$\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \frac{(3+2i) - (\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i)}{1-(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i)} = \frac{\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i}{\frac{2}{5}-\frac{6}{5}i} = \frac{6+2i}{1-3i} = \frac{2i(1-3i)}{1-3i} = 2i.$$

$$\boxed{\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = 2i.}$$

b) Puisque $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} \neq 0$, on sait que $\arg\left(\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right)$. On en déduit que

$$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Ainsi, le triangle BMD est rectangle en M. M est appartient donc au cercle de diamètre $[BD]$ c'est-à-dire au cercle (Γ).

$$\boxed{\text{Le point } M \text{ appartient au cercle } (\Gamma).}$$

4. a) Le point N est sur le cercle (Γ') et donc la droite (AN) est perpendiculaire à la droite (MB) de même que la droite (DM). On en déduit que

$$\boxed{\text{les droites } (DM) \text{ et } (AN) \text{ sont parallèles.}}$$

b) Dans le triangle MBD, le point A est le milieu du côté $[BD]$ et puisque la droite (AN) est parallèle au côté $[DM]$, on en déduit que N est le milieu du segment $[BM]$. Mais alors,

$$z_N = \frac{z_M + z_B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i+1\right) = \frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$$

$$\boxed{z_N = \frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.}$$

5. a) L'expression complexe de la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est $z' = e^{-i\pi/2}(z - z_B) + z_B$ ou encore $z' = -i(z-1)+1$ ou enfin $z' = -iz + 1 + i$. Par suite,

$$z_{M'} = -i\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\right) + 1 + i = -\frac{3}{5}i + \frac{6}{5} + 1 + i = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i.$$

$$\boxed{z_{M'} = \frac{11}{5}+\frac{2}{5}i.}$$

b) On a $A(2,1)$, $B(1,0)$ et $M'\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ et donc $\overrightarrow{M'A}\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ et $\overrightarrow{M'B}\left(-\dfrac{6}{5}, -\dfrac{2}{5}\right)$ puis

$$\overrightarrow{M'A}.\overrightarrow{M'B} = \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{6}{5}\right) + \frac{3}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{25} - \frac{6}{25} = 0.$$

Ainsi, le triangle $AM'B$ est rectangle en M' et donc le point M' appartient au cercle de diamètre $[AB]$ c'est-à-dire au cercle (Γ').

$$\boxed{\text{Le point } M' \text{ appartient au cercle } (\Gamma').}$$

EXERCICE 2

Partie A

1. Soit M un point de l'espace. Puisque I est le milieu de [AD], on a $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IA}$ et donc

$$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) = \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2.$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ de l'espace, } \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2.}$$

2. Soit M un point de l'espace.

$$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow IM = IA.$$

Donc,

$$\boxed{(E) \text{ est la sphère de centre I passant par } A \text{ ou encore la sphère de diamètre [AD].}}$$

Partie B

1. a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-3, 6, 0)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-3, 0, 4)$. Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles et donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés et donc que ces points définissent un plan et un seul.
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 4 \times (-3) + 2 \times 6 = -12 + 12 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 4 \times (-3) + 3 \times 4 = -12 + 12 = 0$. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n}(4, 2, 3) \text{ est normal au plan } (ABC).}$$

b) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow 4(x-3) + 2(y-0) + 3(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3z = 12.$$

$$\boxed{\text{Une équation du plan } (ABC) \text{ est } 4x + 2y + 3z = 12.}$$

2. a) Δ est la droite passant par le point $D(-5, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(4, 2, 3)$. Donc

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de } \Delta \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

b) Le point H est l'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Soit $M(-5 + 4t, 2t, 1 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 4(-5 + 4t) + 2(2t) + 3(1 + 3t) = 12 \Leftrightarrow 29t - 17 = 12 \Leftrightarrow t = 1.$$

Pour $t = 1$, on obtient le point de coordonnées $(-1, 2, 4)$ et donc

$$\boxed{\text{le point H a pour coordonnées } (-1, 2, 4).}$$

c) La distance du point D au plan (ABC) est la distance de D à son projeté orthogonal H sur le plan (ABC). Or

$$DH = \sqrt{(-5 - (-1))^2 + (0 - 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{29}.$$

$$\boxed{\text{La distance du point D au plan } (ABC) \text{ est égale à } \sqrt{29}.}$$

d) $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HA} = (-5 - (-1))(3 - (-1)) + (0 - 2)(0 - 2) + (1 - 4)(0 - 4) = -16 + 4 + 12 = 0$ et donc

$$\boxed{H \in (E).}$$

EXERCICE 3

1. f est dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]1,+\infty[$ et pour $x > 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-\ln'(x)}{\ln^2 x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln^2 x} = \frac{\ln^2 x + 1}{x\ln^2 x}.$$

f' est strictement positive sur $]1,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

• Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $\ln x$ tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $\frac{1}{\ln x}$ tend vers $+\infty$ puis $-\frac{1}{\ln x}$ tend vers $-\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]1,+\infty,\ \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x] = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{\ln x} = 0$. On en déduit que la distance d'un point M de (C) d'abscisse x au point N de Γ de même abscisse tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou encore que les courbes C et Γ sont asymptotes en $+\infty$.

b) Soit $x > 1$. $f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x}$. Or pour $x > 1$, $\ln x > 0$ et donc $-\frac{1}{\ln x} < 0$. Ainsi, pour tout réel $x > 1$, $f(x) - \ln x < 0$. On en déduit que

$$\boxed{(C) \text{ est strictement au-dessous de } \Gamma \text{ sur }]1,+\infty[.}$$

3. a) Soit $a > 1$. Une équation de (T_a) est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ $(*)$. (T_a) passe par O si et seulement si le couple $(0,0)$ vérifie $(*)$ ce qui équivaut à $-af'(a) + f(a) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } a > 1,\ (T_a) \text{ passe par } O \text{ si et seulement si } -af'(a) + f(a) = 0.}$$

b) Soit $x > 1$.

$$g(x) = \left(\ln x - \frac{1}{\ln x}\right) - x\left(\frac{\ln^2 x + 1}{x\ln^2 x}\right) = \ln x - \frac{1}{\ln x} - \frac{\ln^2 x + 1}{\ln^2 x} = \frac{\ln^3 x - \ln^2 x - \ln - 1}{\ln^2 x}.$$

Par suite, $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln^3 x - \ln^2 x - \ln - 1}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln^3 x - \ln^2 x - \ln - 1 = 0$.

c) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et pour $t \in \mathbb{R}$

$$u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (t-1)(3t+1).$$

D'après le cours sur le signe d'un trinôme du second degré, u' est strictement positive sur $]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]1,+\infty[$ et strictement négative sur $]-\frac{1}{3}, 1[$. On en déduit que la fonction u est strictement croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{3}]$, strictement décroissante sur $[-\frac{1}{3}, 1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

En particulier, sur $]-\infty, 1]$, u admet un maximum égal à $u\left(-\frac{1}{3}\right)$ avec $u\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 < 0$. On en déduit que u est strictement négative sur $]-\infty, 1]$ et en particulier ne s'annule pas sur $]-\infty, 1]$.
D'autre part, u est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ avec $u(1) = -2 < 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = +\infty > 0$. On en déduit que u s'annule une et une seule fois sur $[1,+\infty[$ en un certain réel $t_0 > 1$.

$$\boxed{\text{La fonction } u \text{ s'annule une fois et une seule sur } \mathbb{R} \text{ en un certain réel } t_0 > 1.}$$

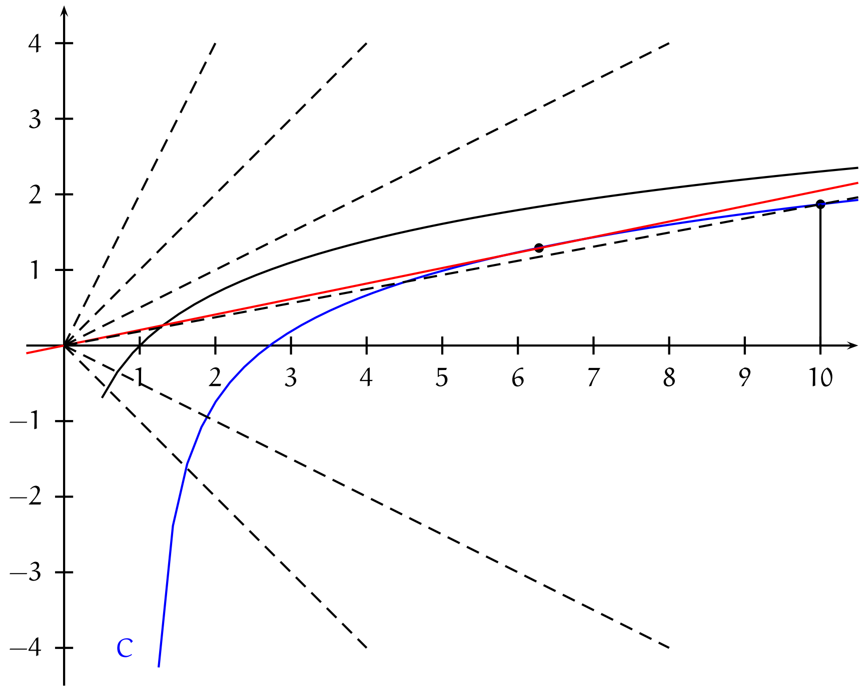
d) Soit $a > 1$.

$$T_a \text{ passe par } O \Leftrightarrow f(a) - af'(a) = 0 \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow u(\ln a) = 0 \Leftrightarrow \ln a = t_0 \Leftrightarrow a = e^{t_0}.$$

De plus, comme $t_0 > 0$, on a bien $e^{t_0} > 1$. Donc,

$$\boxed{\text{Il existe une tangente à } C \text{ passant par } O \text{ et une seule.}}$$

La machine fournit $1,839 < t_0 < 1,84$ puis $6,28 < e^{t_0} < 6,29$.



4. Soit m un réel. Notons m_0 le réel e^{t_0} et m_1 le coefficient directeur de la droite passant par le point O et le point de coordonnées $(10, f(10))$ c'est-à-dire $m_1 = \dfrac{1}{10}\left(\ln 10 - \dfrac{1}{\ln 10}\right)$. Sur le graphique précédent, on lit

- Si $m > m_0$, l'équation $f(x) = mx$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]1, 10]$.
- Si $m = m_0$, l'équation $f(x) = mx$ a une solution et une seule dans l'intervalle $]1, 10]$.
- Si $m_1 \leq m < m_0$, l'équation $f(x) = mx$ a exactement deux solutions dans l'intervalle $]1, 10]$.
- Si $m < m_1$, l'équation $f(x) = mx$ a une solution et une seule dans l'intervalle $]1, 10]$.

EXERCICE 4

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ et donc $[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Mais alors, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $t^n \cos t \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $x_n \geq 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est positive.}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt - \int_0^1 t^n \cos t \, dt = \int_0^1 (t^{n+1} \cos t - t^n \cos t) \, dt = \int_0^1 (t-1)t^n \cos t \, dt.$$

Or, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $t - 1 \leq 0$ et $t^n \cos t \geq 0$ et donc pour tout réel $t \in [0, 1]$, $(t-1)t^n \cos t \leq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $x_{n+1} - x_n \leq 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $x_{n+1} \leq x_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t de $[0, 1]$, on a $t^n \geq 0$ et $\cos t \leq 1$. On en déduit que pour tout réel t de $[0, 1]$, $t^n \cos t \leq t_n$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $x_n \leq \int_0^1 t^n \, dt$ avec

$$\int_0^1 t^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ x_n \leq \frac{1}{n+1}.}$$

b) Pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.}$$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0, 1]$, posons $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = \sin t$. Les fonction u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{array}{cc} u(t) = t^{n+1} & v(t) = \sin t \\ u'(t) = (n+1)t^n & v'(t) = \cos t \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \int_0^1 t^{n+1} \cos t = \left[t^{n+1} \sin t \, dt\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \sin t \, dt = 1^{n+1} \sin 1 - 0^{n+1} \sin 0 - (n+1) \int_0^1 t^n \sin t \, dt \\ &= -(n+1)y_n + \sin 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin 1.}$$

b) Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{-x_{n+1} + \sin 1}{n+1}$. Or, d'après 2.b), $\lim_{n\to+\infty} -x_{n+1} + \sin 1 = \sin 1$ et d'autre part, $\lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{-x_{n+1} + \sin 1}{n+1} = 0$ et donc que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = 0.}$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on a $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos 1$ et donc $nx_n = y_{n+1} - x_n + \cos 1$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = \cos 1$.
De même, d'après 3.a), pour tout entier naturel non nul n, on a $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin 1$ et donc $ny_n = -x_{n+1} - y_n + \sin 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n = \sin 1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nx_n = \cos 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} ny_n = \sin 1.}$$

