

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Réunion

EXERCICE 1

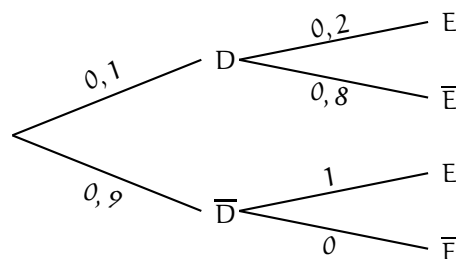
1) a) X est une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,1$.

b) • $p(A) = p(X = 0) = \binom{8}{0} \times (0,1)^0 \times (0,9)^8 = 0,9^8 = 0,43$ à 10^{-2} près.

• $p(B) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,9^8 = 0,57$ à 10^{-2} près.

• $p(C) = p(X = 2) = \binom{8}{2} \times (0,1)^2 \times (0,9)^6 = 28 \times (0,1)^2 \times (0,9)^6 = 0,15$ à 10^{-2} près.

2) a) Traduisons la situation par un arbre.



b) La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(E) = p(D \cap E) + p(\bar{D} \cap E) = p(D) \times p_D(E) + p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(E) = 0,1 \times 0,2 + 0,9 \times 1 = 0,92.$$

La probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle est 0,92.

c) La probabilité demandée est $p_E(D)$. Or

$$p_E(D) = \frac{p(E \cap D)}{p(E)} = \frac{p(D) \times p_D(E)}{p(E)} = \frac{0,1 \times 0,2}{0,92} = 0,022$$
 à 10^{-2} près.

La probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est 0,022 à 10^{-2} près.

3) Notons Y le nombre de stylos ayant un défaut après le contrôle. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

• 8 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;

• chaque expérience a deux issues : « le stylo a un défaut » avec une probabilité $p = 0,022$ (d'après 2.) ou « le stylo n'a pas de défaut » avec une probabilité $1 - p = 0,978$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,022$.

La probabilité demandée est $p(Y = 0)$.

$$p(Y = 0) = \binom{8}{0} \times (0,022)^0 \times (0,978)^8 = 0,84$$
 à 10^{-2} près.

Ainsi, la probabilité est passée de 0,43 avant le contrôle à 0,84 après le contrôle. Cette probabilité a nettement augmenté et le contrôle semble efficace.

EXERCICE 2

Partie A

1) f est strictement croissante sur $]0, e^{1/2}]$ et strictement décroissante sur $[e^{1/2}, +\infty[$, admet un extremum égal à $f(e^{1/2}) = \frac{1}{2e}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Démontrons ces résultats.

• Dérivée de f

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

• Signe de f'

Pour tout réel $x > 0$, on a $x^3 > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2 \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 - 2 \ln(x) > 0 \Leftrightarrow -2 \ln(x) > -1 \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x < e^{1/2} \text{ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R} \text{),} \end{aligned}$$

et de même $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{1/2}$. On retrouve donc le fait que la fonction f est strictement croissante sur $]0, e^{1/2}]$ et strictement décroissante sur $[e^{1/2}, +\infty[$.

• Calcul de l'extremum

$$f(e^{1/2}) = \frac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}.$$

• Limite de f en 0

On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ et d'autre part $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) \times \frac{1}{x^2} = -\infty.$$

• Limite de f en $+\infty$

Un théorème de croissances comparées donne directement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

2) Soit x_0 un réel strictement positif.

Une équation de la tangente (T_{x_0}) à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ou encore

$$y = \frac{1 - 2 \ln(x_0)}{x_0^3} (x - x_0) + \frac{\ln(x_0)}{x_0^2} \text{ ou enfin } y = \frac{1 - 2 \ln(x_0)}{x_0^3} x + \frac{3 \ln(x_0) - 1}{x_0^2}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} O \in (T_{x_0}) &\Leftrightarrow 0 = \frac{1 - 2 \ln(x_0)}{x_0^3} \times 0 + \frac{3 \ln(x_0) - 1}{x_0^2} \Leftrightarrow \frac{3 \ln(x_0) - 1}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow 3 \ln(x_0) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x_0) = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow x_0 = e^{1/3}. \end{aligned}$$

Quand $x_0 = e^{1/3}$, une équation de (T_{x_0}) est

$$y = \frac{1 - 2 \ln(e^{1/3})}{(e^{1/3})^3} x + \frac{3 \ln(e^{1/3}) - 1}{(e^{1/3})^2} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{e} x + 0 = \frac{x}{3e}.$$

(\mathcal{C}) admet une et une seule tangente passant par O : la tangente au point d'abscisse $e^{1/3}$ d'équation $y = \frac{x}{3e}$.

Partie B

1) a) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. On sait alors que g est la primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 et donc f est la dérivée de g .

b) La fonction g est donc dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Étudions le signe de la fonction g' . Pour tout réel $x > 0$, on a $x^2 > 0$. On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\ln(x)$ et donc la fonction g' est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$. Mais alors

la fonction g est strictement croissante sur $]0, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

2) • La fonction f est continue et positive sur $[1, 3]$ (car du signe de $\ln(x)$ sur $[1, 3]$). Donc $g(3) = \int_1^3 f(t) dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, la courbe de f et l'axe des abscisses.

• La fonction f est continue et négative sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et d'autre part, $g(\frac{1}{2}) = \int_1^{1/2} f(t) dt = -\int_{1/2}^1 f(t) dt$. Donc de nouveau $g(\frac{1}{2})$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$, la courbe de f et l'axe des abscisses.

3) a) Soit $x > 1$. Les deux fonctions $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont définies et dérivables sur le segment $[1, x]$ et pour tout réel t de $[1, x]$, $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur le segment $[1, x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et en posant

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(t) & v(t) &= -\frac{1}{t} \\ u'(t) &= \frac{1}{t} & v'(t) &= \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \left[\ln(t) \times \left(-\frac{1}{t}\right) \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{t}\right) dt = -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1)}{1} + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{\ln(x) + 1}{x}. \end{aligned}$$

Si $x \in]0, 1[$, on écrit $g(x) = -\int_x^1 \frac{\ln(t)}{t^2} dt$, les calculs sont alors identiques et aboutissent après deux changements de signe au même résultat.

$$\text{Pour tout réel } x > 0, g(x) = 1 - \frac{\ln(x) + 1}{x}.$$

Remarque. Il est plus simple de vérifier directement que la fonction $x \mapsto 1 - \frac{\ln(x) + 1}{x}$ admet pour dérivée f et prend la valeur 0 en 1.

b) D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

EXERCICE 3

1) a) $u_1 = \left(1 + \frac{2}{1}\right) \times 5 + \frac{6}{1} = 21.$

$$u_1 = 21.$$

b) Donnons les premières valeurs de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_n	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96.

A partir de ce tableau, il semblerait que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit arithmétique de premier terme $d_0 = 16$ et de raison $r = 8$.

2) On sait que la somme d'un nombre fini de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à

$$\frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le premier terme de la suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est v_0 et son n -ème terme est v_{n-1} . La somme cherchée vaut donc

$$v_0 + \dots + v_{n-1} = \frac{(v_0 + v_{n-1})n}{2} = \frac{(v_0 + v_0 + (n-1)r)n}{2} = \frac{(32 + 8(n-1))n}{2} = \frac{8n^2 + 24n}{2} = 4n^2 + 12n.$$

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, v_0 + \dots + v_{n-1} = 4n^2 + 12n.$$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et d'autre part $4 \times 0^2 + 12 \times 0 + 5 = 5$. Donc la formule à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $u_{n-1} = 4(n-1)^2 + 12(n-1) + 5 = 4n^2 + 4n - 3$. Alors

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n} = \frac{(n+2)(4n^2 + 4n - 3) + 6}{n} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 5n}{n} \\ &= 4n^2 + 12n + 5. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = 4n^2 + 4n - 3.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$d_n = (4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5) - (4n^2 + 12n + 5) = 4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 + 5 - 4n^2 - 12n - 5 = 16 + 8n.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $d_n = 16 + 8n$ et donc la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est effectivement la suite arithmétique de premier terme $d_0 = 16$ et de raison 8 .

EXERCICE 4

1) Soit θ un réel. L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle θ est $z' = e^{i\theta}z$. Donc

$$z_B = e^{2i\pi/3} \times z_A = e^{2i\pi/3} \times e^{i\pi/3} = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1,$$

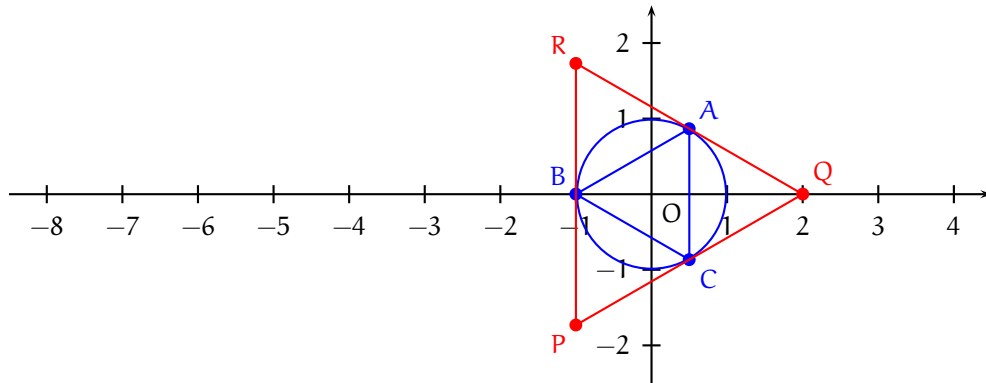
et

$$z_C = e^{2i\pi/3} \times z_B = e^{2i\pi/3} \times e^{i\pi} = e^{5i\pi/3} = e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$z_B = e^{i\pi} = -1 \text{ et } z_C = e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) a) On sait que pour tout réel θ , $|e^{i\theta}| = 1$. Donc $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$ ou encore $OA = OB = OC = 1$. Donc A , B et C sont sur le cercle (\mathcal{C}) ou encore

(\mathcal{C}) est le cercle circonscrit au triangle ABC .



b) Puisque $B = r_{O, 2\pi/3}(A)$ et $C = r_{O, 2\pi/3}(B)$, les trois triangles OAB , OBC et OCA sont isocèles en O , d'angle au sommet $\frac{2\pi}{3}$. Donc les 6 angles \widehat{BAO} , \widehat{ABO} , \widehat{CAO} , \widehat{ACO} , \widehat{BCO} et \widehat{CBO} sont tous égaux à $\frac{\pi}{6}$. Mais alors, les trois angles \widehat{BAC} , \widehat{ABC} et \widehat{ACB} sont égaux à $\frac{\pi}{3}$ et par suite

le triangle ABC est équilatéral.

3) a) Voir figure ci-dessus.

b) L'image d'un triangle équilatéral par une homothétie est un triangle équilatéral et donc

le triangle PQR est équilatéral.

4) a) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k est $z' = kz$. Ici, $k = -2$ et donc

l'écriture complexe de h est $z' = -2z$.

b) Le triangle ABC est équilatéral de centre O . En particulier, O est le centre de gravité du triangle ABC . On en déduit que $\frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$ et donc que

$$z_A + z_B + z_C = 0.$$

Maintenant, d'après la question a), on a $z_Q = -2z_B$ et $z_R = -2z_C$. Par suite,

$$\frac{z_Q + z_R}{2} = \frac{-2z_B - 2z_C}{2} = -z_B - z_C = z_A,$$

et donc

A est le milieu du segment [QR].

c) Par suite, la droite (AP) est la médiane issue de P du triangle équilatéral PQR. On en déduit que la droite (AP) est aussi la médiatrice du segment [QR] et en particulier que la droite (AP) est perpendiculaire à la droite (QR). Maintenant, puisque $P = h(A)$, les points P, O et A sont alignés et donc la droite (AP) est encore la droite (OA). En résumé, le rayon [OA] est perpendiculaire en A à la droite (QR) et on sait alors que

la droite (QR) est tangente au cercle (\mathcal{C}) en A.