

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et H la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par

$$H(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

- a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1; +\infty[$.
- b. Quelle relation existe-t-il entre f et H ?
- c. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . du plan. Interprétez en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x - 1} = x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b. En déduire que $\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$.

c. Montrer que si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln \left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln \left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$ puis de $\int_1^3 f(x) dx$.

EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C . Alors

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA} \quad \text{et} \quad \arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad (2\pi).$$

2. Soit z un nombre complexe et α un réel : $z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega).$$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

- Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D .
 - Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) ?
 - Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
- On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.
 - Comment construire à la règle et au compas les points E et F dans le repère précédent ?
 - Donner l'écriture complexe de r .
 - Déterminer l'affixe du point E .

EXERCICE 3 (4 points)

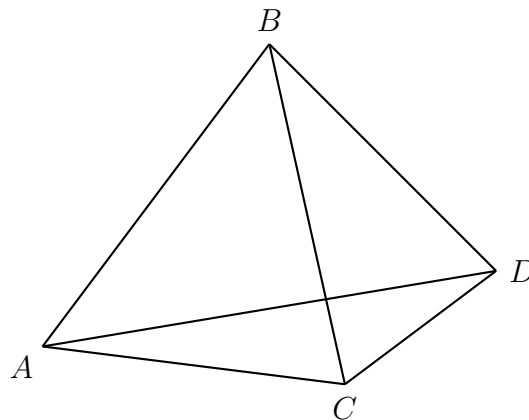
(Commun à tous les candidats)

On considère un tétraèdre $ABCD$. On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB], [CD], [BC], [AD], [AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D .

1. Montrer que les droites $(IJ), (KL)$ et (MN) sont concourantes en G .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD, BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial car ses faces sont isométriques).



2. a. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. a. Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN) .

b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\vec{IJ} \cdot \vec{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB) .

Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD) .

c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

EXERCICE 4 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n .

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$.
 - a. Etudier les variations de f sur $[0; 20]$.
 - b. En déduire que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.
 - c. On donne ci-dessous la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthogonal. Représenter à l'aide de ce graphique les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ sur l'axe des abscisses.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x .

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) : y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.
 - a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) : z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

- b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E) .

2. Montrer que g est définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.
3. Etudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interprétez le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

