BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Pondichéry

EXERCICE 1

1) a. Soit $x \geq 1$. En particulier, $x > 0$ et donc $e^x > 1$ puis $e^x - 1 \neq 0$.

• On en déduit que la fonction f est bien définie sur $[1; +\infty[$.

• De plus, la fonction f est continue sur $[1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[1; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1; +\infty[$. Mais alors, la fonction H est bien définie sur $[1; +\infty[$.

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } H \text{ sont bien définies sur } [1; +\infty[.}$$

b. H est la primitive de f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en 1. Donc

$$\boxed{H \text{ est dérivable sur } [1; +\infty[\text{ et } H' = f.}$$

c. Pour $x \in [1; 3]$, on a $x > 0$ et donc $e^x - 1 > 0$ puis $\dfrac{x}{e^x - 1} > 0$. Par suite, f est positive sur $[1; 3]$. Le nombre $H(3)$ est donc l'aire du domaine $\mathscr{D}$ constitué des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que $1 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

2) a. Soit $x \in [1; 3]$. $e^x \neq 0$ et on peut donc écrire

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)} = x\frac{\dfrac{1}{e^x}}{1 - \dfrac{1}{e^x}} = x\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

b. Pour $x \in [1; 3]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1 - e^{-x})$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[1; 3]$ et pour $x \in [1; 3]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \ln(1 - e^{-x}) \\ u'(x) = 1 & v'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \end{array}$$

De plus les fonctions u' et v' sont continues sur $[1; 3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x)\ dx &= \int_1^3 x\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\ dx \\ &= \left[x\ln(1 - e^{-x})\right]_1^3 - \int_1^3 1 \times \ln(1 - e^{-x})\ dx = 3\ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x})\ dx. \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^3 f(x)\ dx = 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x})\ dx.}$$

c. La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$. Donc pour x réel,

$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow e^{-3} \leq e^{-x} \leq e^{-1} \Rightarrow 1-e^{-1} \leq 1-e^{-x} \leq 1-e^{-3} \Rightarrow \ln(1-e^{-1}) \leq \ln(1-e^{-x}) \leq \ln(1-e^{-3})$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1;3],\ \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq \ln(1-e^{-x}) \leq \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right).}$$

d. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\int_1^3 dx \leq \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\ dx \leq \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)\int_1^3 dx,$$

ou encore $2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\ dx \leq 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$. Mais alors à partir de la formule de la question b.,

$$3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) \leq \int_1^3 f(x)\ dx \leq 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right),$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 f(x)\ dx \leq 3\left[\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\right].}$$

A l'aide de la calculatrice, on obtient encore

$$\boxed{0,4 \leq \int_1^3 f(x)\ dx \leq 1,2.}$$

EXERCICE 2

Partie A. *Démonstration de cours.*

On suppose le plan rapporté à un repère orthonomal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

• Si $M = \Omega$ alors $z = \omega$, puis $M' = \Omega$ et $z' = \omega$. Dans ce cas on a bien $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

• Si $M \neq \Omega$, alors $M' \neq \Omega$ et M' est le point du plan tel que $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi]$. Mais alors d'après le premier pré-requis donné par l'énoncé

$$\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha\ [2\pi].$$

Ainsi, $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument α c'est-à-dire le nombre $e^{i\theta}$ d'après le deuxième prérequis.

On a ainsi montré que $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$ ou encore que $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Ce dernier résultat est donc vrai dans tous les cas et on a montré que

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ d'affixe } z,\ z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).}$$

Partie B.

1) a. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Puis,

• $z_A = -\sqrt{3} - i = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-5i\pi/6}$,

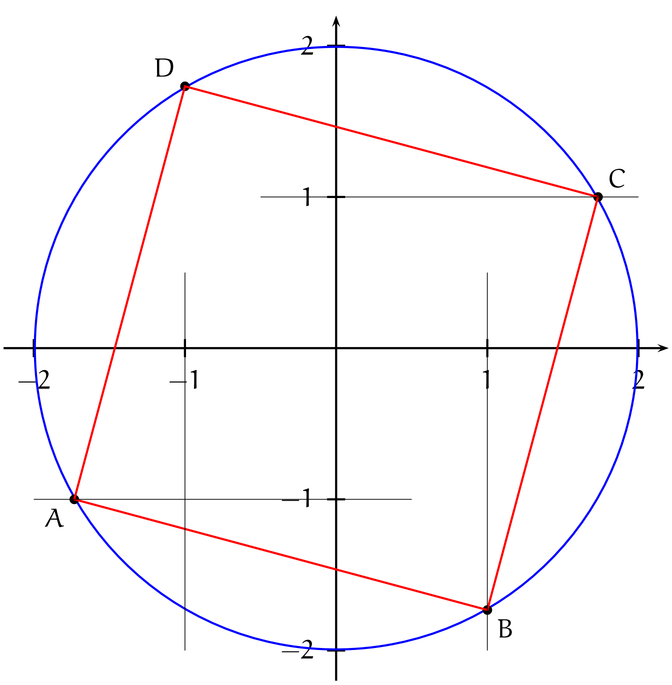
• $z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\pi/3}$,

• $z_C = -z_A = e^{i\pi} \times 2e^{-5i\pi/6} = 2e^{i\pi/6}$,

• $z_D = -z_B = e^{i\pi} \times 2e^{-i\pi/3} = 2e^{2i\pi/3}$.

$$\boxed{z_A = 2e^{-5i\pi/6},\ z_B = 2e^{-i\pi/3},\ z_C = -z_A = 2e^{i\pi/6} \text{ et } z_D = -z_B = 2e^{2i\pi/3}.}$$

b.



Les quatre points A, B, C et D sont sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2.

Le point A est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = -1$ dont l'abscisse est négative.

Le point B est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $x = 1$ dont l'ordonnée est négative.

Le point C est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = 1$ dont l'abscisse est positive.

Le point D est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $x = -1$ dont l'ordonnée est positive.

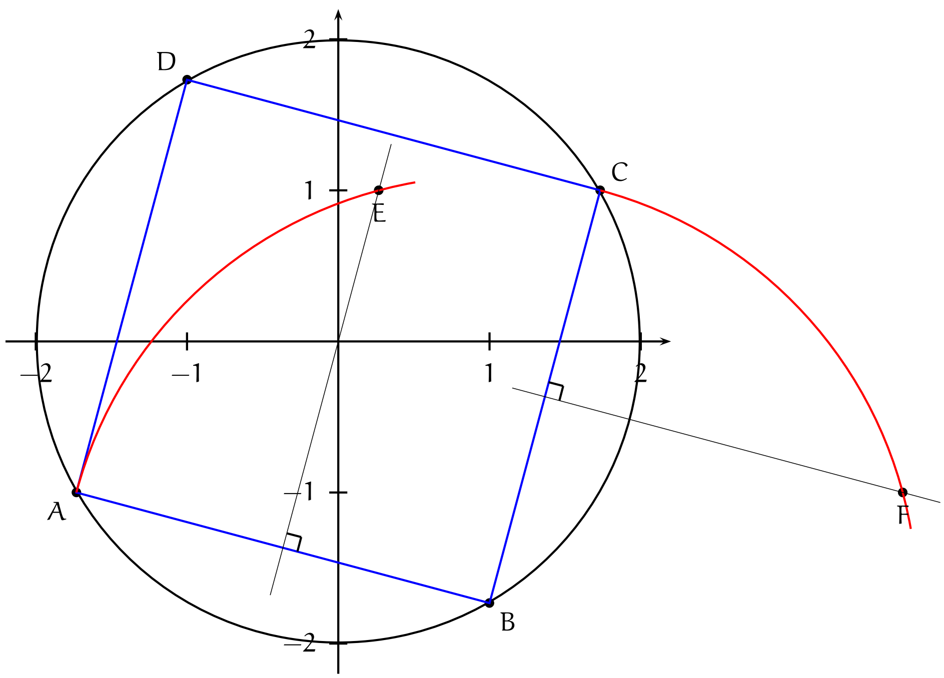
c. 1 ère solution. • On a $z_C = -z_A$ et $z_D = -z_B$ ou encore $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2} = 0$. Ainsi, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu à savoir O. Le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme de centre O.
• $[AC]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ et donc le triangle ADC est rectangle en D. Ainsi, le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit et donc ce parallélogramme est un rectangle.
• $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \sqrt{3} \times (-2) + 2 \times \sqrt{3} = 0$ et les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires. Le quadrilatère $ABCD$ est aussi un losange.

En résumé le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle et un losange et donc un carré.

2 ème solution. On a $z_B = iz_A$, $z_C = iz_B$, $z_D = iz_C$ (et $z_A = iz_D$). Puisque $i = e^{i\pi/2}$, si r est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, $B = r(A)$, $C = r(B)$, $D = r(C)$ (et $A = r(D)$). Le quadrilatère $ABCD$ est ainsi la réunion de quatre triangles rectangles isocèles en O et encore une fois

$$\boxed{\text{le quadrilatère } ABCD \text{ est un carré.}}$$

2) a. E est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Par suite, le triangle BAE est équilatéral indirect. Le point E est donc sur le cercle de centre B passant par A et sur la médiatrice de $[AB]$ en tournant dans le sens indirect. De même, le point F est sur le cercle de centre B passant par C et sur la médiatrice de $[AC]$ en tournant dans le sens indirect.



b. L'écriture complexe de r est

$$\begin{aligned} z' &= e^{-i\pi/3}(z - 2e^{-i\pi/3}) + 2e^{-i\pi/3} = e^{-i\pi/3}z - 2e^{-2i\pi/3} + 2e^{-i\pi/3} \\ &= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z - (-1 - i\sqrt{3}) + (1 - i\sqrt{3}) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 2. \end{aligned}$$

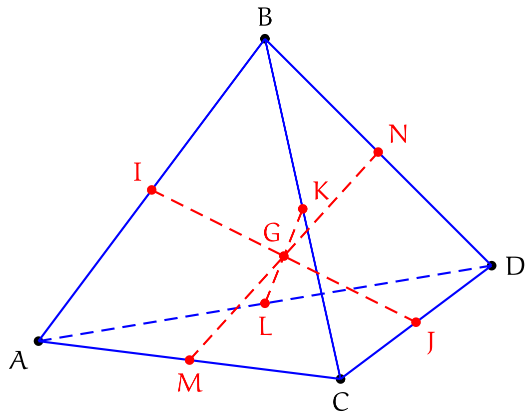
$$\boxed{\text{L'écriture complexe de } r \text{ est } z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 2.}$$

c. $z_E = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} - i) + 2 = \dfrac{(1 - i\sqrt{3})(-\sqrt{3} - i)}{2} + 2 = 2 - \sqrt{3} + i.$

$$\boxed{z_E = 2 - \sqrt{3} + i.}$$

EXERCICE 3

1)



D'après le théorème du barycentre partiel,

$$G = \text{bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\} = \text{bar}\{(\text{bar}\{(A,1),(B,1)\},2),(\text{bar}\{(C,1),(D,1)\},2)\} = \text{bar}\{(I,2),(J,2)\}$$
$$= \text{bar}\{(I,1),(J,1)\}.$$

Donc, G est le milieu du segment $[I,J]$. De même en associant B et C puis A et D, on voit que G est le milieu du segment $[KL]$ et en associant A et C puis B et D, on voit que G est le milieu du segment $[MN]$. En particulier,

$\boxed{\text{Les droites } (IJ),\ (KL) \text{ et } (MN) \text{ sont concourantes en } G.}$

2) **a.** Les diagonales du quadrilatère $IKJL$ se coupent en leur milieu. Donc le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.

Dans le triangle ABC, I est le milieu de $[BA]$ et K est le milieu de $[BC]$. Donc $IK = \frac{1}{2}AC$.

De même, dans le triangle ABD, I est le milieu de $[AB]$ et L est le milieu de $[AD]$. Donc $IL = \frac{1}{2}BD$.
Par hypothèse, $AC = BD$ et on en déduit que $IK = IL$. Ainsi, le parallélogramme $IKJL$ a deux consécutifs égaux et donc

$\boxed{\text{le quadrilatère } IKJL \text{ est un losange.}}$

Par symétrie des rôles, les quadrilatères $IMJN$ ($IM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = JN$) et $KNLM$ ($KN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = KM$) sont aussi des losanges.

b. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et donc

$\boxed{(IJ)\perp(KL),\ (IJ)\perp(MN) \text{ et } (KL)\perp(MN).}$

3) **a.** . D'après la question précédente, la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (KL) et (MN) qui sont deux droites sécantes du plan (MKN). On en déduit que

$\boxed{\text{la droite } (IJ) \text{ est orthogonale au plan } (MKN).}$

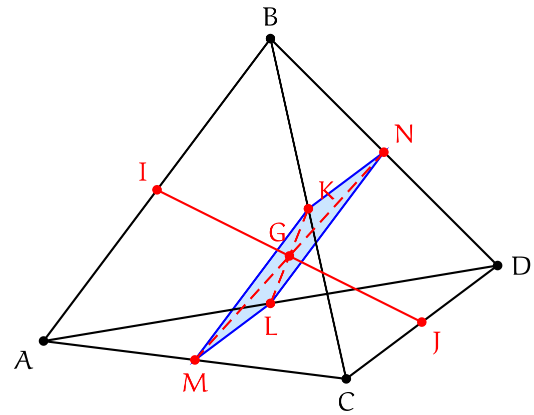
b. Puisque la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN), la droite (IJ) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (IJ) est orthogonale à la droite (MK) et donc tout vecteur directeur de la droite (IJ) est orthogonal à tout vecteur directeur de la droite (MK). On en déduit que

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK} = 0.$$

Dans le triangle ABC, M est le milieu de $[CA]$ et K est le milieu de $[CB]$. On en déduit que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MK}$ et donc $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK} = 0$. Par suite,

$\boxed{\text{la droite } (IJ) \text{ est orthogonale à la droite } (AB).}$

De même, la droite (IJ) est orthogonale à la droite (KN) et donc $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{KN} = 0$ et la droite (IJ) est orthogonale à la droite (CD).



c. Le plan médiateur de $[AB]$ est le plan passant par I de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ ou encore l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB} = 0$. Comme la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB) et que le point G est sur la droite (IJ), on a $\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{AB} = 0$ et donc

$$\boxed{G \text{ est dans le plan médiateur de } [AB].}$$

Par symétrie des rôles, le point G est aussi dans le plan médiateur de $[CD]$ et $[AC]$.

d. G est dans le plan médiateur de $[AB]$ et donc $GA = GB$. G est dans le plan médiateur de $[CD]$ et donc $GC = GD$. G est dans le plan médiateur de $[AC]$ et donc $GA = GC$. Finalement $GA = GC = GD = GD$ ce qui montre que

$$\boxed{G \text{ est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre } ABCD.}$$

EXERCICE 4

Partie A : un modèle discret

1) a. Pour tout réel x de $[0;20]$, $f(x) = \dfrac{1}{10}(20x - x^2)$. f est dérivable sur $[0;20]$ et pour tout réel x de $[0;20]$, $f'(x) = \dfrac{1}{10}(20 - 2x) = \dfrac{1}{5}(10 - x)$. On en déduit le :

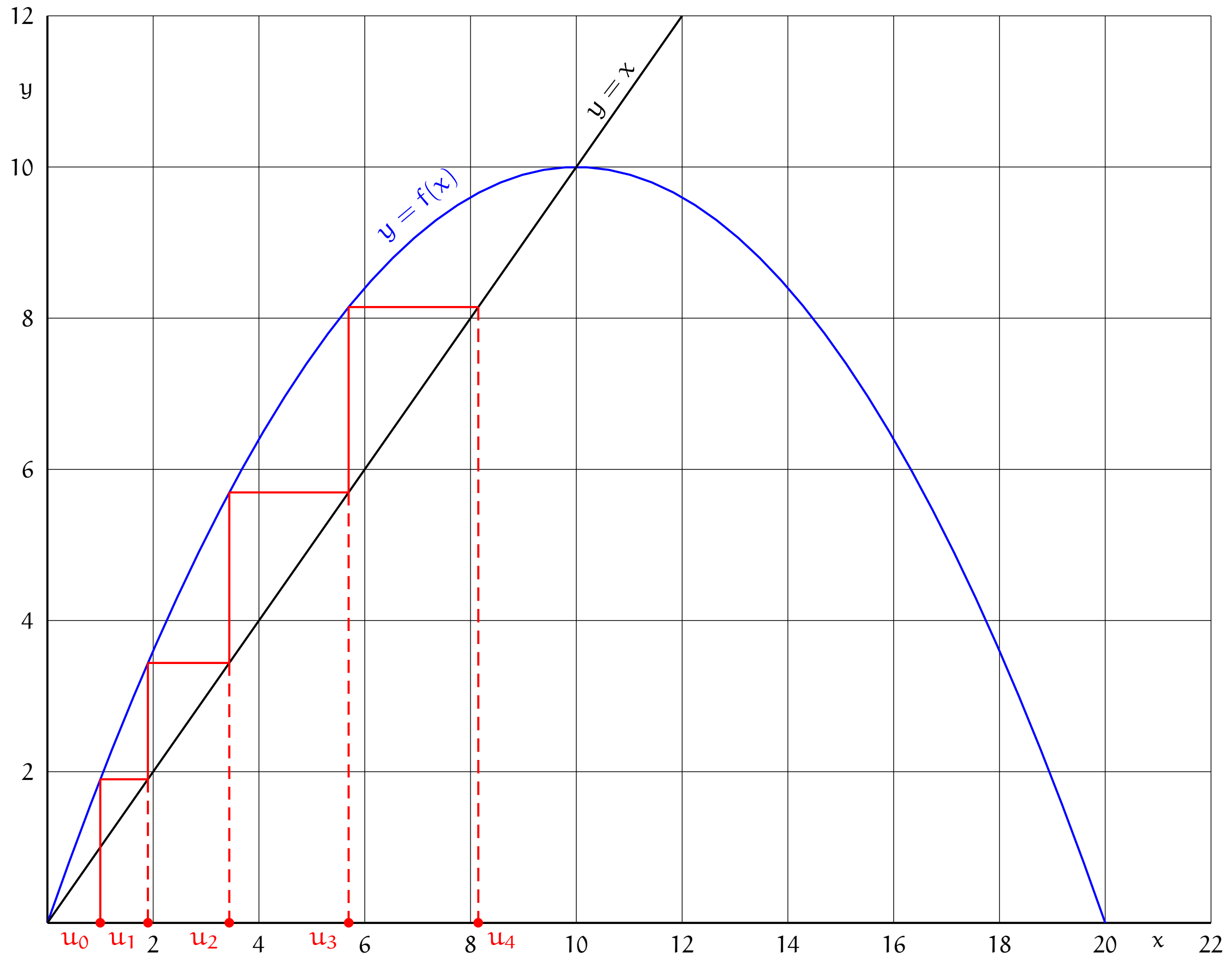
Tableau de variations de f.

x	0		10		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	0

b. f admet donc un minimum égal à 0 atteint en $x = 0$ et $x = 20$ et un maximum égal à 10 atteint en $x = 10$. Donc,

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0;20],\ f(x) \in [0;10].}$$

c. Représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

• On a $u_0 = 1$ puis $u_1 = f(u_0) = \dfrac{19}{10} = 1,9$ et donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$. Puisque f est croissante sur $[0;10]$, on a $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$ ce qui s'écrit encore $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10.}$$

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 10. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on note ℓ. De plus, comme pour tout entier n, on a $1 \leq u_n \leq 10$ (car $u_0 = 1$ et car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante), quand n tend vers $+\infty$, on obtient $1 \leq \ell \leq 10$. Ensuite, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n(20 - u_n)$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = \dfrac{1}{10}\ell(20-\ell)$ puis $10\ell = \ell(20-\ell)$ puis $10 = 20 - \ell$ (car $\ell \neq 0$) et enfin $\ell = 10$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to\infty} u_n = 10.}$$

Partie B : un modèle continu

1) a. Soit y une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ ne s'annulant pas sur $[0, +\infty[$. Posons alors $z = \dfrac{1}{y}$.

z est définie, dérivable sur $[0; +\infty[$, ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et de plus $y = \dfrac{1}{z}$ et donc $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$. Mais alors,

$$y' = \frac{1}{20}y(10-y) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{20}y^2 \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{20}\frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Soient a et b deux réels. On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$. Ici, $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{1}{20}$. Donc

$$\boxed{\text{les solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto Ce^{-x/2} + \frac{1}{10},\ C \in \mathbb{R}.}$$

Si une telle fonction ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$, elle fournit une solution de (E) sur $[0; +\infty[$ à savoir la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{Ce^{-x/2} + \dfrac{1}{10}}$.

2) D'après ce qui précède, il existe une contante réelle C telle que pour tout $x \geq 0$, $g(x) = \dfrac{10}{10Ce^{-x/2} + 1}$. L'égalité $g(0) = 1$ fournit $\dfrac{1}{C + \dfrac{1}{10}} = 1$ puis $C + \dfrac{1}{10} = 1$ et donc $C = \dfrac{9}{10}$. Donc, pour tout réel $x \geq 0$,

$$g(x) = \frac{1}{\dfrac{9}{10}e^{-x/2} + \dfrac{1}{10}} = \frac{10}{9e^{-x/2} + 1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ g(x) = \frac{10}{9e^{-x/2} + 1}.}$$

3) La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et pour $x \geq 0$

$$g'(x) = 10 \times \frac{-(9e^{-x/2} + 1)'}{(9e^{-x/2} + 1)^2} = 10 \times \frac{-9 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times e^{-x/2}}{(9e^{-x/2} + 1)^2} = \frac{4,5e^{-x/2}}{(9e^{-x/2} + 1)^2}.$$

g' est strictement positive sur $[0; +\infty[$ et donc

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[.}$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x/2} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{10}{0+1} = 10$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 10.}$$

5) Soit x un entier naturel.

$$\begin{aligned}
g(x) \geq 5 &\Leftrightarrow \frac{10}{9e^{-x/2}+1} \geq 5 \\
&\Leftrightarrow \frac{9e^{-x/2}+1}{10} \leq \frac{1}{5} \text{ (par décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et car } 9e^{-x/2}+1>0) \\
&\Leftrightarrow 9e^{-x/2}+1 \leq 2 \Leftrightarrow 9e^{-x/2} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x/2} \leq \frac{1}{9} \\
&\Leftrightarrow \ln(e^{-x/2}) \leq \ln\frac{1}{9} \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0;+\infty[) \\
&\Leftrightarrow -\frac{x}{2} \leq -\ln 9 \Leftrightarrow x \geq 2\ln 9 \\
&\Leftrightarrow x \geq 4,3\ldots \Leftrightarrow x \geq 5 \text{ (car } x \text{ est entier).}
\end{aligned}$$

$x=5$ correspond à l'année 2010 et donc

Le nombre de foyers possédant un téléviseur à fond plat dépassera 5 millions à partir de l'année 2010.

