BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

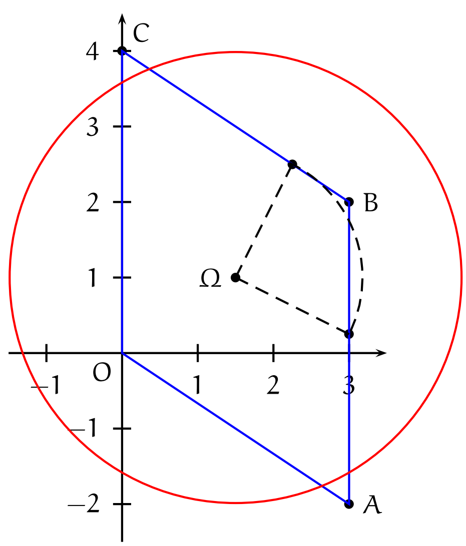
1. Le discriminant de l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ est

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = 36 - 52 = -16 = (4i)^2.$$

$\Delta < 0$ et donc l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $\dfrac{6-4i}{2}$ ou encore $3-2i$ et $\overline{3-2i} = 3+2i$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2 - 6z + 13 = 0 \text{ sont les nombres } a = 3-2i \text{ et } b = 3+2i.}$$

2.



3. $z_{\overrightarrow{OA}} = a = 3-2i$ et $z_{\overrightarrow{CB}} = b - c = (3+2i) - 4i = 3-2i$. Donc $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{CB}}$ ou encore $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère OABC est un parallélogramme.}}$$

4. Ω est le milieu de la diagonale [OB] et donc $z_\Omega = \dfrac{0+b}{2} = \dfrac{3}{2} + i$.

$$\boxed{z_\Omega = \frac{3}{2} + i.}$$

5. Notons (E) l'ensemble considéré. D'après le théorème du barycentre partiel, $\text{bar}(O(1), A(1), B(1), C(1)) = \text{bar}(O(1), B(1), A(1), C$ $\text{bar}(\Omega(2), \Omega(2)) = \Omega$. Ω est donc l'isobarycentre du parallélogramme $OABC$ et on sait que pour tout point M du plan on a

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{M\Omega}.$$

Soit M un point du plan.

$$M \in (E) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{M\Omega}\| = 12 \Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{M\Omega}\| = 12 \Leftrightarrow M\Omega = 3.$$

L'ensemble des points M du plan tel que $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$ est le cercle de centre Ω et de rayon 3.

6. a) L'abscisse de M est 3 et son ordonnée est β. Donc $z_M = 3 + \beta i$. Ensuite

$$\begin{aligned} z_N &= e^{i\pi/2}(z_M - z_\Omega) + z_\Omega = i(3 + \beta i - (\frac{3}{2} + i)) + \frac{3}{2} + i = i(\frac{3}{2} + (-1 + \beta)i) + \frac{3}{2} + i = \frac{3}{2}i - (-1 + \beta) + \frac{3}{2} + i \\ &= \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i. \end{aligned}$$

Le point N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

b) On a vu que le vecteur $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $3 - 2i$. D'autre part,

$$z_{\overrightarrow{CN}} = z_N - c = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i - 4i = \frac{5}{2} - \beta - \frac{3}{2}i.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} N \in (BC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{CN} \text{ et } \overrightarrow{CB} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - \beta & 3 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(\frac{5}{2} - \beta) + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow -5 + 2\beta + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

N appartient à la droite (BC) si et seulement si $\beta = \frac{1}{4}$.

Dans ce cas, le point M a pour coordonnées $(3, \frac{1}{4})$ et le point N a pour coordonnées $(\frac{9}{4}, \frac{5}{2})$.

EXERCICE 2

1. a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-1,-1,1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-2,-5,-1)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles (s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, alors $-2 = -t$ et $-5 = -t$ ce qui est impossible) et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés.}}$$

Les points A, B et C définissent donc un plan et un seul.

b) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times(-1)+(-1)\times(-1)+1 = -2+1+1 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times(-2)+(-1)(-5)-1 = -4+5-1 = 0$. Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), on a montré que

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (ABC).}$$

c) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)-(y-2)+(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x-y+z = 3.$$

$$\boxed{\text{Une équation du plan } (ABC) \text{ est } 2x-y+z=3.}$$

2. Pour $t=-1$, on obtient $\left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=-2 \\ z=5 \end{array}\right.$. Ceci montre que le point D appartient à la droite (Δ). La droite (Δ) est dirigée par exemple par le vecteur de coordonnées $(-2,1,-1)$. Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{n}$ et donc la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC).

$$\boxed{D \in (\Delta) \text{ et } (\Delta) \text{ est perpendiculaire au plan } (ABC).}$$

3. Puisque (Δ) est la perpendiculaire au plan (ABC) passant par D, le point E est le point d'intersection de (Δ) et du plan (ABC). Soit donc $M(2-2t,-1+t,4-t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de (Δ).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(2-2t)-(-1+t)+(4-t) = 3 \Leftrightarrow -6t+9 = 3 \Leftrightarrow t = 1.$$

Quand $t=1$, le point M a pour coordonnées $(0,0,3)$ et donc

$$\boxed{E\,(0,0,3).}$$

Maintenant, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}$ sont $\begin{pmatrix} (1-0)+(0-0)+(-1-0) \\ (2-0)+(1-0)+(-3-0) \\ (3-3)+(4-3)+(2-3) \end{pmatrix}$ ou encore $(0,0,0)$. Ainsi, $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}$ et donc E est l'isobarycentre du triangle ABC ou encore

$$\boxed{E \text{ est le centre de gravité du triangle } ABC.}$$

EXERCICE 3

1. Soient a et b deux réels, a étant non nul. On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{-x} + 2$, $k \in \mathbb{R}$.
Donc, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x, $f(x) = ke^{-x} + 2$. Mais alors $f(\ln 2) = ke^{-\ln 2} + 2 = \frac{k}{e^{\ln 2}} + 2 = \frac{k}{2} + 2$ et donc $f(\ln 2) = 1 \Rightarrow \frac{k}{2} + 2 = 1 \Rightarrow k = -2$.

$$\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = -2e^{-x} + 2.$$

Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or $f(0) = -2e^0 + 2 = 0$ et $f'(0) = -f(0) + 2 = 2$. Donc une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $y = 2x$.

La proposition 1 est vraie.

2. Pour $x \geq 1$, posons $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 1 \neq 0$. Donc

la proposition 2 est fausse.

3. Notons u_n la masse, exprimée en grammes, du bloc de glace au bout de n minutes. Pour chaque entier n, on a $u_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right) u_n = 0,9u_n$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10000$ et de raison $q = 0,9$ et on en déduit que, pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n = 10000 \times (0,9)^n$. Maintenant,

$$\begin{aligned} u_n \leq 1 &\Leftrightarrow 10000 \times (0,9)^n \leq 1 \Leftrightarrow \ln(10000 \times (0,9)^n) \leq \ln 1 \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow \ln(10000) + n\ln(0,9) \leq 0 \Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln(10000)}{\ln(0,9)} \text{ (car } \ln(0,9) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 87,4\ldots \Leftrightarrow n \geq 88 \text{ (car } n \text{ est entier).} \end{aligned}$$

Ainsi, à la soixante-dixième minute, la masse du bloc de glace est encore strictement supérieure à 1 g.

la proposition 3 est fausse.

4. Puisque A et B sont indépendants, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$ et donc

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,4 - 0,16 = 0,64 \neq 0,8.$$

la proposition 4 est fausse.

5. Notons A l'événement « la pièce est acceptée » et donc $\overline{A}$ l'événement « la pièce n'est pas acceptée » et notons D « la pièce est défectueuse » et donc $\overline{D}$ l'événement « la pièce n'est pas défectueuse ». La probabilité demandée est $p(A)$. La formule des probabilités totales fournit

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cap D) + p(A \cap \overline{D}) = p(D) \times p_D(A) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(A) = \frac{2}{100} \times \left(1 - \frac{99}{100}\right) + \left(1 - \frac{2}{100}\right) \times \frac{97}{100} \\ &= \frac{2 + 98 \times 97}{10000} = 0,9508. \end{aligned}$$

la proposition 5 est vraie.

EXERCICE 4

Partie A Restitution organisée de connaissances.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.
Alors, la fonction $g - f$ est positive sur $[a, b]$ et par positivité de l'intégrale (premier pré-requis de l'énoncé), on a $\int_a^b (g(x) - f(x))\ dx \geq 0$. Par linéarité de l'intégrale (deuxième pré-requis de l'énoncé), on en déduit que $\int_a^b g(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \geq 0$ puis que $\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$.

Partie B

1. Pour tout réel $x \geq 0$, on a $e^{-x} > 0$ et donc $1 + e^{-x} > 1 > 0$. On en déduit que la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et de plus pour $x \geq 0$

$$f'(x) = 1 + \frac{(e^{-x})'}{1 + e^{-x}} = 1 + \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 + e^{-x} - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Mais alors f' est positive sur $[0, +\infty[$ et donc f est croissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, pour $x \geq 0$, on a $f(x) \geq f(0)$ avec $f(0) = 0 + \ln(1 + e^0) = \ln 2$ et donc $f(0) > 0$. f est donc positive sur $[0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est croissante et positive sur } [0, +\infty[.}$$

2. a) Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$. Or, $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim_{x \to +\infty} 1 + e^{-x} = 1$ puis $\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \ln 1 = 0$. On a montré que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la courbe } C \text{ admet la droite } D \text{ pour asymptote en } +\infty.}$$

b) Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$. Or, pour tout réel $x \geq 0$, on a $1 + e^{-x} > 1$. Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que pour tout réel $x \geq 0$, $\ln(1 + e^{-x}) > 0$ et donc que pour tout réel $x \geq 0$ $f(x) - x > 0$.

$$\boxed{\text{La courbe } C \text{ est strictement au-dessus de la droite } D \text{ sur } [0, +\infty[.}$$

3. a) Puisque la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est strictement positive sur $[0, 1]$, le nombre I est l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$, la droite D et la courbe C, exprimée en unités d'aire (voir graphique page suivante).

b) Pour $t \in [0, +\infty[$, posons $g(t) = \ln(1 + t) - t$. g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $t \geq 0$,

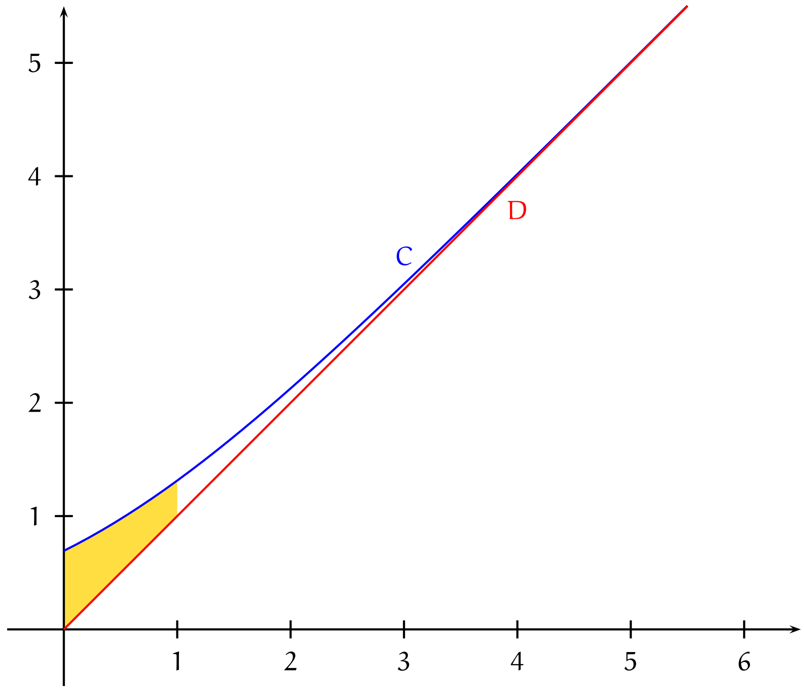
$$g'(t) = \frac{1}{1 + t} - 1 = -\frac{t}{1 + t}.$$

Maintenant, pour tout réel positif t, on a $-\frac{t}{1 + t} \leq 0$ et donc g' est négative sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et en particulier que pour tout réel $t \geq 0$, $g(t) \leq g(0)$ avec $g(0) = \ln 1 - 0 = 0$. Ceci fournit pour tout réel $t \geq 0$, $\ln(1 + t) - t \leq 0$ ou encore $\ln(1 + t) \leq t$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \geq 0,\ \ln(1 + t) \leq t.}$$

c) Soit $x \in [0, +\infty[$. Posons $t = e^{-x}$. Alors $t \in [0, +\infty[$ et d'après la question précédente, on a $\frac{t}{1 + t} \leq \ln(1 + t) \leq t$ ce qui s'écrit encore $\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \geq 0,\ \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}.}$$



d) Par croissante de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx \leq \int_0^1 \ln(1+e^{-x})\,dx \leq \int_0^1 e^{-x}\,dx.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = (-e^{-1}) - (-e^0) = 1 - e^{-1}$. D'autre part,

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\left[\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -(\ln(1+e^{-1}) - \ln(1+e^0)) = \ln 2 - \ln(1+e^{-1}) = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right).$$

On a montré que

$$\boxed{\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1}.}$$

e) La calculatrice fournit $\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right) = 0,37\ldots$ et $1 - e^{-1} = 0,63\ldots$.

On en déduit que $0,3 \leq \ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1} \leq 0,7$.

$$\boxed{0,3 \leq I \leq 0,7.}$$

4. Soit x un réel positif. La distance de M à N, exprimée en unités de longueur, est égale à $f(x) - x$ ou encore $\ln(1+e^{-x})$. Comme une unité de longueur est égale à 20 mm, cette distance est encore égale à $20\ln(1+e^{-x})$ mm. Maintenant

$$\begin{aligned}
20\ln(1+e^{-x}) \leq 0,5 &\Leftrightarrow \ln(1+e^{-x}) \leq 0,025 \\
&\Leftrightarrow e^{\ln(1+e^{-x})} \leq e^{0,025} \text{ (car la fonction exponentielle est croissante sur } \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow 1+e^{-x} \leq e^{0,025} \Leftrightarrow e^{-x} \leq e^{0,025} - 1 \text{ (avec } e^{0,025} - 1 > 0) \\
&\Leftrightarrow \ln(e^{-x}) \leq \ln(e^{0,025} - 1) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow -x \leq \ln(e^{0,025} - 1) \Leftrightarrow x \geq -\ln(e^{0,025} - 1).
\end{aligned}$$

$$\boxed{M \text{ et } N \text{ sont indiscernables pour } x \geq -\ln(e^{0,025} - 1) \text{ avec } -\ln(e^{0,025} - 1) = 3,6\ldots.}$$

