Session 2008

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la fonc tion f définie sur $]-1;6[$ par $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$.

On définit pour tout entier naturel n la suite (U_n) par $\left\{\begin{array}{l} U_0=-3 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{array}\right.$.

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée en annexe accompagnée de la droite d'équation $y=x$.
Construire sur ce graphique les points $M_0(U_0;0)$, $M_1(U_1;0)$, $M_2(U_2;0)$, $M_3(U_3;0)$ et $M_4(U_4;0)$.
Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?

2.

2.a. Démontrer que si $x<3$, on a alors $\dfrac{9}{6-x}<3$. En déduire que $U_n<3$ pour tout entier naturel n.

2.b. Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

2.c. Que peut-on déduire des questions 2.a. et 2.b. ?

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n=\dfrac{1}{U_n-3}$ pour tout entier naturel n.

3.a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

3.b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.

3.c. Calculer la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soit $OABC$ un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC et OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1.

1.a. Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

1.b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont ortogonales. On démontrera de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est admis.

1.c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$.

2.a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2.b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

2.c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent un point H de coordonnées $\left(\dfrac{36}{49}; \dfrac{18}{49}; \dfrac{12}{49}\right)$.

3.

3.a. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

3.b. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$. En déduire l'aire du triangle ABC.

3.c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10% n'ont pas survécu, 75% deviennent rouges et les 15% restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5% n'ont pas survécu, 65% deviennent rouges et les 30% restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60% au premier éleveur, 40% au second.

1. Un enfant achète un poison le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

1.a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est $0,92$.

1.b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

1.c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

L'espace est rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, orthonormé.

On donne le point $A(-1; 2; 3)$ et la droite D de système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite D.

1. .

1.a. Donner une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à la droite D et passant par A.

1.b. Vérifier que le point $B(-3; 3; -4)$ appartient à la droite D.

1.c. Calculer la distance d_B entre le point B et le plan P.

1.d. Exprimer la distance d en fonction de d_B et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

2. Soit M un point de la droite D. Exprimer AM^2 en fonction de t. Retrouver alors la valeur de d.

ANNEXE

A rendre avec la copie

EXERCICE 1