BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

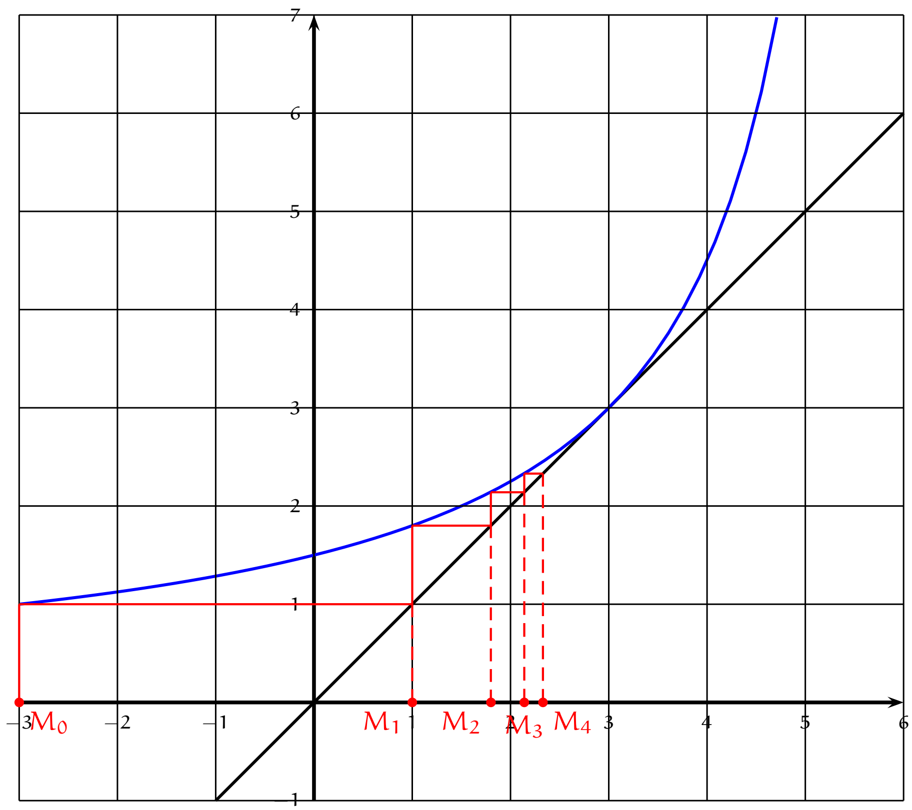
- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1.



Il semblerait que la suite (u_n) soit strictement croissante et converge vers 3.

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x < 3 \Rightarrow -x > -3 \Rightarrow 6 - x > 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{6-x} < \frac{1}{3} \text{ (car la fonction } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[) \\ &\Rightarrow \frac{1}{6-x} < \frac{9}{3} \Rightarrow \frac{9}{6-x} < 3. \end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n < 3$.

- $u_0 = -3$ et donc $u_0 < 3$. L'inégalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n < 3$. Alors d'après ce qui précède, $\dfrac{9}{6 - u_n} < 3$ ou encore $u_{n+1} < 3$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n < 3.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{9}{6 - U_n} - U_n = \frac{9 - 6U_n + U_n^2}{6 - U_n} = \frac{(U_n - 3)^3}{6 - U_n}.$$

Maintenant, puisque $U_N < 3$, on a $6 - U_n > 0$ et $(U_n - 3)^2 > 0$ et finalement $U_{n+1} - U_n > 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n on a $U_n < U_{n+1}$ et donc que

$$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

c) Ainsi, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3 et donc

$$\boxed{\text{la suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

3. a) Puisque pour chaque entier naturel n, on a $U_n < 3$, pour chaque entier naturel n, V_n existe.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 3} = \frac{1}{\dfrac{9}{6 - U_n} - 3} = \frac{1}{\dfrac{9 - 18 + 3U_n}{6 - U_n}} = \frac{6 - U_n}{-9 + 3U_n} = \frac{6 - U_n}{3(U_n - 3)},$$

et donc

$$V_{n+1} - V_n = \frac{6 - U_n}{3(U_n - 3)} - \frac{1}{U_n - 3} = \frac{6 - U_n - 3}{3(U_n - 3)} = \frac{-(U_n - 3)}{3(U_n - 3)} = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} - V_n = -\dfrac{1}{3}$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } -\frac{1}{3}.}$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel n, $V_n = V_0 + n\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{n}{3} = -\dfrac{2n+1}{6}$. En particulier, pour tout entier n, $V_n \neq 0$ et on a $U_n - 3 = \dfrac{1}{V_n}$ puis

$$U_n = 3 + \frac{1}{V_n} = 3 - \frac{6}{2n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ U_n = 3 - \frac{6}{2n+1}.}$$

EXERCICE 2

1. a) La droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) et donc orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (OH) est orthogonale à la droite (BC).
Puisque le triangle OAB est rectangle en O, la droite (OA) est perpendiculaire à la droite (OB). De même, la droite (OA) est perpendiculaire à la droite (OC). La droite (OA) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) et par suite perpendiculaire à ce plan. On en déduit que la droite (OA) est orthogonale à toute droite du plan (ABC) et en particulier orthogonale à la droite (BC).

$$\boxed{(BC)\perp(OH) \text{ et } (BC)\perp(OA).}$$

b) La droite (BC) est orthogonale aux droites (OH) et (OA) qui sont deux droites sécantes du plan (OAH). La droite (BC) est donc perpendiculaire au plan (OAH) et par suite orthogonale à toute droite du plan (OAH). En particulier, la droite (AH) est orthogonale à la droite (BC). De même, la droite (BH) est orthogonale à la droite (AC)

$$\boxed{(AH)\perp(BC) \text{ et } (BH)\perp(AC).}$$

c) Le point H appartient donc à la hauteur issue de A et à la hauteur issue de B du triangle ABC. On en déduit que

$$\boxed{H \text{ est l'orthocentre du triangle } ABC.}$$

2. Il est clair que le tétraèdre $OABC$ est trirectangle.
a) Le plan (ABC) a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.
$A \in (ABC) \Leftrightarrow a + d = 0 \Leftrightarrow a = -d$.
$B \in (ABC) \Leftrightarrow 2b + d = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{d}{2}$.
$B \in (ABC) \Leftrightarrow 3c + d = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{d}{3}$.
Les équations du plan (ABC) sont de la forme $-dx - \dfrac{d}{2}y - \dfrac{d}{3}z + d = 0$, $d \neq 0$, et pour $d = -6$, on obtient

$$\boxed{\text{une équation du plan } (ABC) \text{ est } 6x + 3y + 2z = 6.}$$

b) Un vecteur normal au plan (ABC) est donc le vecteur $\overrightarrow{n}(6;3;2)$. Maintenant, (D) est la droite passant par $O(0;0;0)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et donc

$$\boxed{\text{une représentation paramétrique de la droite } (D) \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{array}\right. .}$$

c) Soit $M(6t;3t;2t)$ un point de (D).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 6(6t) + 3(3t) + 2(2t) = 6 \Leftrightarrow t\frac{6}{49}.$$

Pour $t = \dfrac{6}{49}$, on obtient le point de coordonnées $\left(\dfrac{36}{49};\dfrac{18}{49};\dfrac{12}{49}\right)$ et donc

$$\boxed{\text{les coordonnées du point } H \text{ sont } \left(\frac{36}{49};\frac{18}{49};\frac{12}{49}\right).}$$

3. **a)** La distance d du point O au plan (ABC) est

$$d = \frac{|6\times 0+3\times 0+2\times 0-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}.$$

$$\boxed{\text{La distance du point O au plan (ABC) est égale à } \frac{6}{7}.}$$

b) Le volume V du tétraèdre OABC est

$$V = \frac{1}{3}\times \text{aire}(OAB)\times OC = \frac{1}{3}\times\frac{1\times 2}{2}\times 3 = 1.$$

$$\boxed{\text{Le volume du tétraèdre OABC est égal à } 1.}$$

V est aussi égal à $\frac{1}{3}\times \text{aire}(ABC)\times OH$ et donc $\text{aire}(ABC) = \frac{3V}{OH} = \frac{3}{OH}$. Or

$$OH = \sqrt{\left(\frac{36}{49}\right)^2+\left(\frac{18}{49}\right)^2+\left(\frac{12}{49}\right)^2} = \frac{6}{49}\times\sqrt{6^2+3^2+2^2} = \frac{6}{\sqrt{49}},$$

et donc

$$\text{aire}(ABC) = \frac{3}{6/\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{49}}{2}.$$

$$\boxed{\text{L'aire du triangle ABC est égale à } \frac{\sqrt{49}}{2}.}$$

c)

$$\begin{aligned}(\text{aire}(OAB))^2+(\text{aire}(OBC))^2+(\text{aire}(OCA))^2 &= \left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2+\left(\frac{2\times 3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\times 1}{2}\right)^2 = \frac{4+36+9}{4} = \frac{49}{4}\\ &= (\text{aire}(ABC))^2.\end{aligned}$$

EXERCICE 3

1. a) Notons S l'événement « le poisson a survécu après un mois », P l'événement « le poisson provient du premier élevage » et D l'événement « le poisson provient du deuxième élevage » (de sorte que $\mathsf{D} = \overline{\mathsf{P}}$). La formule des probabilités totales fournit

$$p(S) = p(S \cap P) + p(S \cap D) = p(P) \times p_P(S) + p(D) \times p_D(S) = 0,6 \times 0,9 + 0,4 \times 0,95 = 0,54 + 0,38 = 0,92.$$

La probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est $0,92$.

b) Notons R l'événement « après un mois, le poisson est rouge ». La formule des probabilités totales fournit

$$p(R) = p(R \cap P) + p(R \cap D) = p(P) \times p_P(R) + p(D) \times p_D(R) = 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,65 = 0,45 + 0,26 = 0,71.$$

La probabilité que le poisson soit toujours rouge un mois plus tard est $0,71$.

c) Notons G l'événement « après un mois, le poisson est gris ». La probabilité demandée est $p_G(P)$. La formule des probabilités totales montre que $p(S) = p(R) + p(G)$ et donc

$$p_G(P) = \frac{p(G \cap P)}{p(G)} = \frac{p(P) \times p_P(G)}{p(S) - p(R)} = \frac{0,9 \times 0,15}{0,92 - 0,71} = \frac{0,135}{0,21} = \frac{9}{14} = 0,64 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

La probabilité que le poisson provienne du premier élevage sachant qu'il est gris est $\frac{9}{14}$.

2. Notons Y le nombre d'alevins qui ont survécu au bout d'un mois. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'alevin a survécu au bout d'un mois » avec une probabilité $p = 0,92$ (d'après 1.a)) ou « l'alevin n'a pas survécu au bout d'un mois » avec une probabilité $1 - p = 1 - 0,08$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,92$.

La probabilité demandée est $p(Y = 3)$ et on a

$$p(Y = 3) = \binom{5}{3} \times 0,92^3 \times 0,08^2 = 0,04 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

La probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie est $0,04$ à 10^{-2} près.

3. D'après les questions 1.a) et 1.b), la loi de probabilité de X est

x	1	$0,25$	$-0,1$
$p(X = x)$	$0,71$	$0,21$	$0,08$

L'espérance mathématique de X est alors

$$E(X) = 0,71 \times 1 + 0,21 \times 0,25 + 0,08 \times (-0,1) = 0,75 \text{ euro arrondi au centime d'euro.}$$

$E(X) = 0,75$ euro arrondi au centime d'euro.

EXERCICE 4

1. a) La droite D est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}(4;1;2)$ et donc P est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(4;1;2)$. Soit alors $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow 4(x+1) + (y-2) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow 4x + y + 2z = 4.$$

$$\boxed{\text{Une équation du plan P est } 4x + y + 2z = 4.}$$

b) Quand $t = -3$ dans le système représentant D, on obtient $x = -3$, $y = 3$ et $z = -4$ ce qui montre que

$$\boxed{B \in D.}$$

c) La distance de B au plan P est

$$d_B = \frac{|4 \times (-3) + 3 + 2 \times (-4) - 4|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}.$$

$$\boxed{d_B = \sqrt{21}.}$$

d) On a $AB = \sqrt{(-3+1)^2 + (3-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{54}$.
Notons alors H le projeté orthogonal de A sur la droite D. H est aussi le projeté orthogonal de B sur le plan P et d'après le théorème de PYTHAGORE on a $AB^2 = AH^2 + HB^2 = d^2 + d_B^2$ et donc

$$d = \sqrt{AB^2 - d_B^2} = \sqrt{54 - 21} = \sqrt{33}.$$

$$\boxed{d = \sqrt{33}.}$$

2. Soit $M(9+4t; 6+t; 2+2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de D.

$$\begin{aligned} AM^2 &= (10+4t)^2 + (4+t)^2 + (-1+2t)^2 = (16+1+4)t^2 + (80+8-4)t + 100 + 16 + 1 = 21t^2 + 84t + 117 \\ &= 21(t^2 + 4t) + 117 = 21\left(t+2\right)^2 - 21 \times 2^2 + 117 = 21(t+2)^2 + 33. \end{aligned}$$

Par suite, $AM^2 \geq 33$ avec égalité effectivement obtenue pour $t = -2$. Ainsi, la valeur minimum de la distance AM est $\sqrt{33}$ et on retrouve

$$\boxed{d = \sqrt{33}.}$$

