

**EXERCICE 1**

**Partie A**

1. Notons A (resp. B) l'événement « le joueur tire une boule dans l'urne A (resp. B) ». La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = p(A) \times p_A(R) + p(B) \times p_B(R) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0,15.$$

**$p(R) = 0,15.$**

2. Calculons les probabilités des événements A et B sachant que l'événement R est réalisé.

$$p_R(A) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{p(A) \times p_A(R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{15} \times \frac{20}{3} = \frac{4}{9},$$

et

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \times p_B(R)}{p(R)} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{12} \times \frac{20}{3} = \frac{5}{9}.$$

Ainsi,  $p_R(B) > p_R(A)$  et donc

**si le joueur obtient une boule rouge, il est plus probable que cette boule provienne de l'urne B.**

**Partie B**

1. Notons X le nombre de boules rouges obtenues au cours des deux épreuves. La variable aléatoire G a la même loi de probabilité que la variable X.

Maintenant, la variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 2 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est rouge » avec une probabilité  $p = 0,15$  (d'après A.1.) ou « la boule tirée n'est pas rouge » avec une probabilité  $1 - p = 0,85$ .

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 2$  et  $p = 0,15$ . On obtient ainsi

- $p(G = 2x) = p(X = 2) = \binom{2}{2} (0,15)^2 (0,85)^0 = 0,0225,$
- $p(G = x - 2) = p(X = 1) = \binom{2}{1} (0,15)^1 (0,85)^1 = 0,255,$
- $p(G = -4) = p(X = 0) = \binom{2}{0} (0,15)^0 (0,85)^2 = 0,7225.$

On peut résumer ces résultats dans un tableau.

t	2x	x - 2	-4
p(G = t)	0,0225	0,255	0,7225

2.

$$\begin{aligned} E(G) &= p(G = 2x) \times 2x + p(G = x - 2) \times (x - 2) + p(G = -4) \times (-4) \\ &= 0,0225(2x) + 0,255(x - 2) + 0,7225(-4) = 0,3x - 3,4. \end{aligned}$$

$$E(G) = 0,3x - 3,4.$$

3.  $E(G) \geq 0 \Leftrightarrow 0,3x - 3,4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{34}{3} \Leftrightarrow x \geq 12$  (car x est entier).

L'espérance de gain devient positive pour  $x \geq 12$ .

## EXERCICE 2

### Partie A

1. On sait que pour tout nombre complexe non nul  $z$ ,  $\arg(z^{100}) = 100 \arg(z) [2\pi]$ . Donc un argument de  $z^{100}$  est  $\frac{100\pi}{3}$ . Or

$$\frac{100\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{96\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 32\pi = \frac{4\pi}{3} + 16 \times 2\pi$$

et un argument de  $z^{100}$  est aussi  $\frac{4\pi}{3}$ . Cet argument n'est pas de la forme  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et donc  $z^{100}$  n'est pas réel.

La proposition 1 est fausse.

2. Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z \neq 1$ . On note  $A$  le point d'affixe 1.

$$\begin{aligned} z \in (E) &\Leftrightarrow \left| \frac{z}{1-z} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|1-z|} = 1 \Leftrightarrow |z| = |1-z| \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow OM = AM \text{ et } M \neq A \\ &\Leftrightarrow M \in \text{med}[OA] \text{ et } M \neq A. \end{aligned}$$

La médiatrice de  $[OA]$  est parallèle à l'axe des imaginaires purs et n'est donc pas parallèle à l'axe des réels.

La proposition 2 est fausse.

3. L'expression complexe de la rotation de centre  $K$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  est  $z' = e^{-i\pi/2}(z - z_K) + z_K$ . Notons  $O'$  l'image du point  $O$  par  $r$ . On a  $e^{-i\pi/2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$  et donc

$$z_{O'} = (-i)(0 - 1 - i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3} = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}).$$

La proposition 3 est vraie.

4. Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4 = 4 \left( \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 \right) = -4 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Donc  $\Delta < 0$  et l'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées  $z_1$  et  $z_2 = \overline{z_1}$ . Le produit de ces deux solutions vaut 1 mais aussi  $z_1 \overline{z_1}$  ou encore  $|z_1|^2$ . Donc  $|z_1|^2 = 1$  puis  $|z_1| = 1$ . On a aussi  $|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1| = 1$ .

La proposition 4 est vraie.

### Partie B

5.  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

Maintenant, les diagonales du carré  $ABCD$  sont perpendiculaires et donc  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ . D'autre part, la droite  $(CG)$  est perpendiculaire au plan  $(ABC)$  et donc orthogonale à toute droite de ce plan. On en déduit que  $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ .

Finalement,  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ .

Maintenant, on vient en fait de montrer de manière plus générale que la diagonale  $(AG)$  du cube est orthogonale à la diagonale qui ne passe pas par  $A$  d'une face ayant  $A$  pour sommet et donc, en échangeant les rôles des points  $B$ ,  $D$  et  $E$ , on a aussi  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ . La droite  $(AG)$  est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan  $(BDE)$ . On en déduit que la droite  $(AG)$  est perpendiculaire au plan  $(BDE)$  ou encore que le vecteur  $\overrightarrow{AG}$  est normal au plan  $(BDE)$ .

La proposition 5 est vraie.

$$6. \vec{EB} \cdot \vec{ED} = (\vec{EA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{EA} + \vec{AD}) = \vec{EA} \cdot \vec{EA} + \vec{EA} \cdot \vec{AD} + \vec{EA} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1.$$

Donc  $\vec{EB} \cdot \vec{ED} \neq 0$  et les droites (EB) et (ED) ne sont pas perpendiculaires (l'angle  $\widehat{BAD}$  est droit et donc, en remontant « verticalement » de A à E, l'angle droit disparaît).

La proposition 6 est fausse.

### EXERCICE 3

#### Partie A. Démonstration de cours

Soit  $(u_n)$  une suite croissante et non majorée. Soit  $A$  un réel.

Puisque la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée, le réel  $A$  n'est pas un majorant de la suite  $(u_n)$ . Il existe donc un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > A$ . Mais la suite  $(u_n)$  est croissante et donc, si  $n$  est un entier supérieur ou égal à  $n_0$ , on a  $u_n \geq u_{n_0} > A$ .

On a montré que, pour tout réel  $A$ , tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à  $A$  et donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

#### Partie B

1. Pour  $x \geq 0$ , on a  $x + 1 > 0$ . On en déduit que la fonction  $x \mapsto \ln(x + 1)$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ . Mais alors, la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $[0, +\infty[$  et pour  $x \geq 0$  on a

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + x.$$

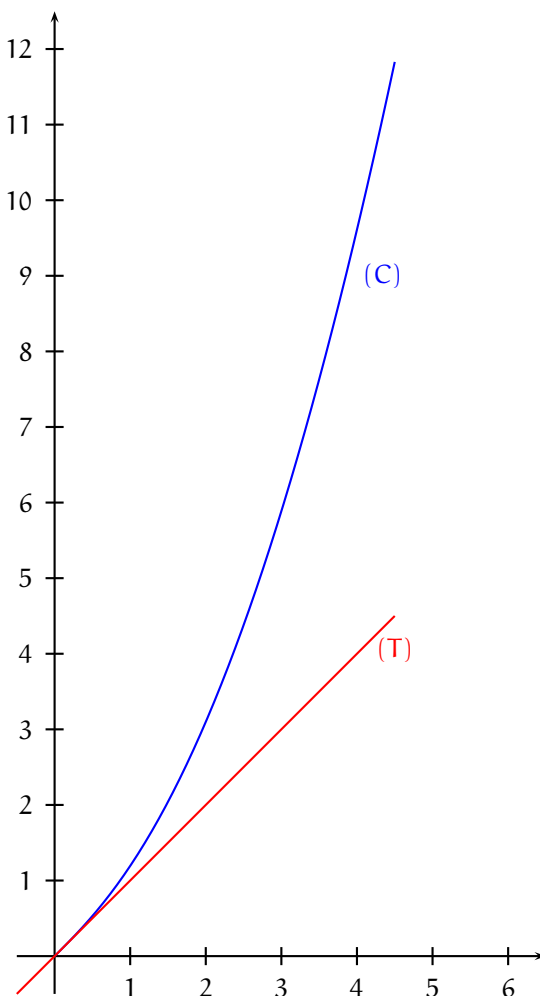
Cette expression est strictement positive sur  $[0, +\infty[$  et donc

la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

2. Une équation de la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse 0 est  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  avec  $f(0) = \ln 1 + 0 = 0$  et  $f'(0) = 1 + 0 = 1$ . Donc

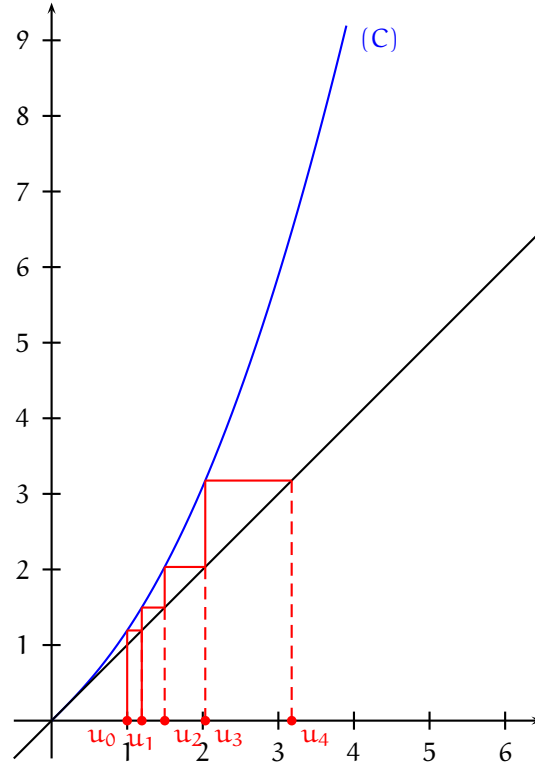
une équation de  $(T)$  est  $y = x$ .

#### 3. Construction de $(C)$ et $(T)$



## Partie C

1. Construction des cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$ .



2. Il semblerait que la suite soit croissante et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

3. a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1$ .

- $u_0 = 1$  et donc l'inégalité est vraie quand  $n = 0$ .

- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $u_n \geq 1$ . Puisque  $f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ , on a  $f(u_n) \geq f(1)$  ou encore  $u_{n+1} \geq \ln 2 + \frac{1}{2}$ .

Comme  $\ln 2 + \frac{1}{2} = 1,1\dots$ , on a en particulier  $u_{n+1} \geq 1$ .

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1$ .

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ .

- On a  $u_1 = 1,1\dots$  et  $u_0 = 1$ . Par suite  $u_0 \leq u_1$  et l'inégalité est vraie quand  $n = 0$ .

- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $u_n \leq u_{n+1}$ . Puisque  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont dans  $[1, +\infty[$  et que  $f$  est croissante sur  $[1, +\infty[$ , on en déduit que  $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$  et donc que  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ .

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$  et donc que

la suite  $(u_n)$  est croissante.

c) Si la suite  $(u_n)$  est majorée, étant croissante, elle converge vers un certain réel  $\ell$ . Puisque chaque  $u_n$  est supérieur ou égal à 1, on a alors  $\ell \geq 1$ .

Maintenant, par passage à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans l'égalité  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on obtient  $\ell = f(\ell)$  (par continuité de  $f$  sur  $[1, +\infty[$  et donc en  $\ell$ ). Ceci montre que  $\ell$  est l'abscisse d'un point commun à (T) et (C). Mais le résultat admis au début de la partie C montre que le seul point commun entre (C) et (T) est le point de coordonnées  $(0, 0)$ . Comme 0 n'est pas supérieur ou égal à 1, on aboutit à une contradiction. Donc,

la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée.

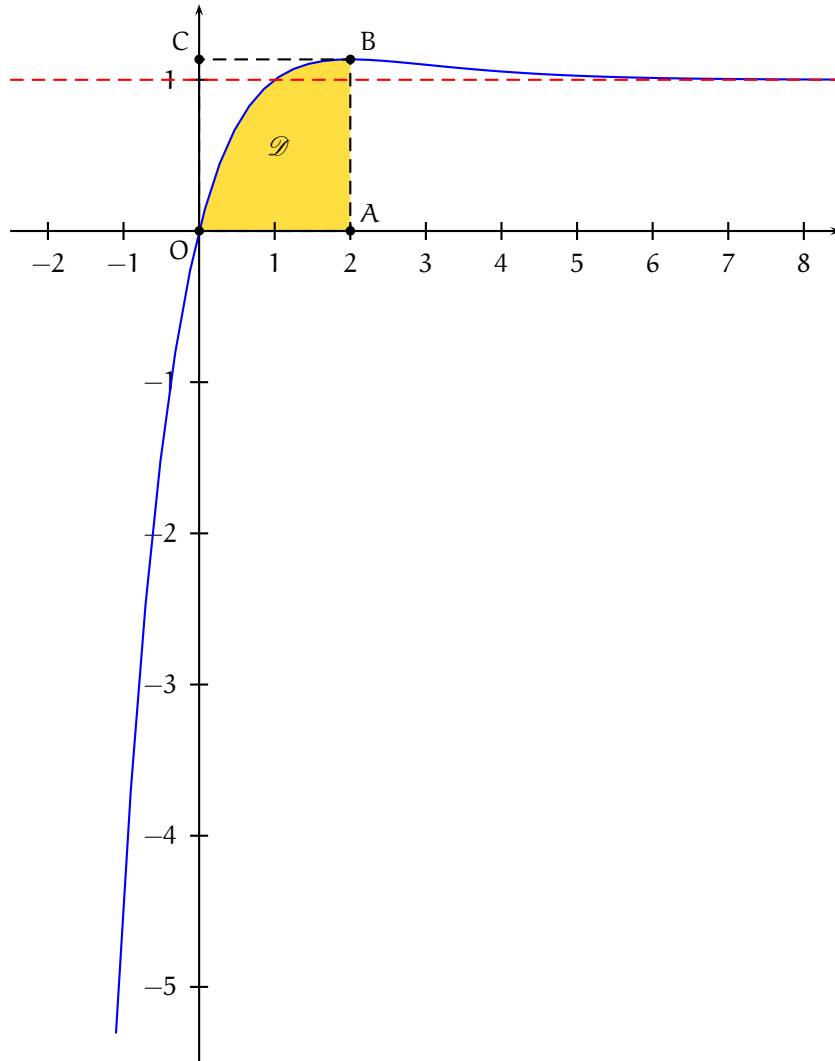
d) D'après le résultat de cours de la partie A, puisque la suite  $(u_n)$  est croissante et non majorée,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## EXERCICE 4

### Partie A

1. Exemple de courbe répondant aux contraintes de l'énoncé.



2. a) D'après le tableau de variations de la fonction  $f$ , la fonction  $f$  est positive sur l'intervalle  $[0, 2]$ . On en déduit que  $g(2)$  est l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  constitué des points de coordonnées  $(x, y)$  telles que  $0 \leq x \leq 2$  et  $0 \leq y \leq f(x)$ , exprimée en unités d'aire.

b) Puisque  $g(2)$  est une aire,  $g(2) \geq 0$ . D'autre part, l'aire de  $\mathcal{D}$  est inférieure ou égale à l'aire du rectangle  $OABC$  (voir la figure de la question 1). L'aire de  $OABC$ , exprimée en unités d'aire, est égale à  $2 \times (1 + e^{-2})$  ou encore à  $2,27 \dots$ . En particulier, l'aire de  $OABC$  est inférieure ou égale à  $2,5$  et il en est de même de l'aire de  $\mathcal{D}$  et donc de  $g(2)$ .

$$0 \leq g(2) \leq 2,5.$$

3. a) Soit  $x \geq 2$ . Pour tout réel  $t$  de  $[2, x]$ ,  $f(t) \geq 1$ . Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_2^x f(t) dt \geq \int_2^x 1 dt = 1 \times (x - 2) = x - 2.$$

Maintenant, d'après la relation de CHASLES,  $g(x) = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt$ . Or,  $\int_0^2 f(t) dt \geq 0$  et  $\int_2^x f(t) dt \geq x - 2$ . On en déduit que  $g(x) \geq x - 2$ .

$$\text{Pour tout réel } x \geq 2, g(x) \geq x - 2.$$

b) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

4. On sait que  $g$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en 0.  $g$  est ainsi dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g' = f$ . Le tableau de variations de  $f$  montre que  $f$  est négative sur  $] -\infty, 0]$  et positive sur  $[0, +\infty[$ . On en déduit que

$g$  est décroissante sur  $] -\infty, 0]$  et croissante sur  $[0, +\infty[$ .

## Partie B

1. Soit  $x$  un réel.

**1er cas :**  $x \geq 0$ . Pour  $t \in [0, x]$ , posons  $u(t) = t - 1$  et  $v(t) = -e^{-t}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[0, x]$  et pour tout réel  $t$  de  $[0, x]$

$$\begin{aligned} u(t) &= t - 1 & v(t) &= -e^{-t} \\ u'(t) &= 1 & v'(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

De plus, les deux fonctions  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[0, x]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^x (t-1)e^{-t} dt &= [(t-1)(-e^{-t})]_0^x - \int_0^x 1(-e^{-t}) dt = (x-1)(-e^{-x}) - (-1)(-e^0) + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= (1-x)e^{-x} - 1 + [-e^{-t}]_0^x = (1-x)e^{-x} - 1 + (-e^{-x} + 1) = -xe^{-x}. \end{aligned}$$

**2ème cas :**  $x < 0$ . On écrit  $\int_0^x (t-1)e^{-t} dt = -\int_x^0 (t-1)e^{-t} dt$ . On effectue les mêmes calculs sur l'intervalle  $[x, 0]$  et comme les bornes sont inversées on obtient

$$\int_x^0 (t-1)e^{-t} dt = -(-xe^{-x}) = xe^{-x},$$

et donc de nouveau  $\int_0^x (t-1)e^{-t} dt = -xe^{-x}$ . Ainsi,

$$\text{pour tout réel } x, \text{ on a } \int_0^x (t-1)e^{-t} dt = -xe^{-x}.$$

2. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que pour tout réel  $x$  on a

$$g(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t} dt + \int_0^x 1 dt = -xe^{-x} + x = x(1 - e^{-x}).$$

$$\text{Pour tout réel } x, g(x) = x(1 - e^{-x}).$$

3. On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^{-x} = +\infty$ . Comme d'autre part  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty.$$