BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

France métropolitaine

EXERCICE 1

1) a) La fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

Donc, la fonction F est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$. On en déduit que

$$I = \int_1^e \ln x \, dx = F(e) - F(1) = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = e - e + 1 = 1.$$

$$\boxed{I = 1.}$$

b) Pour $x \in [1;e]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = (\ln x)^2$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;e]$ et on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = (\ln x)^2 \\ u'(x) = 1 & v'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x. \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1;e]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e 1 \times (\ln x)^2 \, dx = \left[x \times (\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \, dx \\ &= e(\ln e)^2 - (\ln 1)^2 - 2\int_1^e \ln x \, dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= e - 2I. \end{aligned}$$

$$\boxed{J = e - 2I.}$$

c) Par suite, $J = e - 2I = e - 2 \times 1 = e - 2$.

$$\boxed{J = e - 2.}$$

d) Le graphique fourni montre que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[1;e]$. Par suite,

$$A = \int_1^e (f(x) - g(x)) \, dx = \int_1^e f(x) \, dx - \int_1^e g(x) \, dx = I - J = 1 - (e - 2) = 3 - e.$$

$$\boxed{\text{L'aire } A \text{ est égale à } 3 - e \text{ unité d'aire.}}$$

2) Soit $x \in [1; e]$. Le point M a pour coordonnées $(x; \ln x)$ et le point N a pour coordonnées $(x; (\ln x)^2)$. Puisque pour $x \in [1; e]$, on a $f(x) \geq g(x)$,

$$MN = |y_N - y_M| = y_M - y_N = \ln x - (\ln x)^2.$$

Pour $x \in [1; e]$, posons $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$. h est dérivable sur $[1; e]$ et pour $x \in [1; e]$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x} = \frac{1 - 2\ln x}{x}.$$

Sur $[1; e]$, $h'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln x$. Donc, pour $x \in [1; e]$,

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{1/2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}.$$

Ainsi, la fonction h est croissante sur $[1; \sqrt{e}]$ et décroissante sur $[\sqrt{e}; e]$. On en déduit que la fonction h admet un maximum en $\sqrt{e}$. Ce maximum vaut $h(\sqrt{e})$ avec

$$h(\sqrt{e}) = \ln(e^{1/2}) - (\ln(e^{1/2}))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$\boxed{MN \text{ est maximale pour } x = \sqrt{e} \text{ et la valeur maximale de } MN \text{ est } \frac{1}{4}.}$

EXERCICE 2

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2, -2, 2)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles ou encore les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou enfin

$$\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

b) Les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan et un seul. De plus,

- $2x_A + y_A - z_A - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$
- $2x_B + y_B - z_B - 3 = 2 + 2 - 1 - 3 = 0$
- $2x_C + y_C - z_C - 3 = 6 - 1 - 2 - 3 = 0$.

Ainsi, les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation $2x + y - z - 3 = 0$ et donc

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan (ABC) est } 2x + y - z - 3 = 0.}$$

2) Le plan (P) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, 2, -1)$ et le plan (Q) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}'$ de coordonnées $(2, 3, -2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont pas colinéaires et donc les plans (P) et (Q) sont sécants en une droite $(\mathscr{D})$.

On sait que l'ensemble $(\mathscr{D}')$ d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, est une droite. Pour vérifier que $(\mathscr{D}')$ est la droite $(\mathscr{D})$, il suffit donc de vérifier tout point de $(\mathscr{D}')$ appartient aux plans (P) et (Q). Or, pour tout réel t,

$$-2 + t + 2 \times 3 - t - 4 = -2 + t + 6 - t - 4 = 0,$$

et

$$2 \times (-2 + t) + 3 \times 3 - 2 \times t - 5 = -4 + 2t + 9 - 2t - 5 = 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{les plans (P) et (Q) sont sécants en la droite } (\mathscr{D}) \text{ de représentation paramétrique } \left\{\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.}$$

3) L'intersection des plans (ABC), (P) et (Q) est encore l'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan (ABC).
Soit donc $M(-2 + t, 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite $(\mathscr{D})$.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(-2 + t) + 3 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow -4 + t = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

Pour $t = 4$, le point M a pour coordonnées $(2, 3, 4)$ et donc

$$\boxed{\text{l'intersection des plans (ABC), (P) et (Q) est le point de coordonnées } (2, 3, 4).}$$

4) On sait que la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$ est la plus courte distance de A à un point de $(\mathscr{D})$.
Soit donc $M(-2 + t, 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite $(\mathscr{D})$.

$$\begin{aligned} AM^2 &= (-2 + t - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (t - 0)^2 = (t - 3)^2 + 4 + t^2 = t^2 - 6t + 9 + 4 + t^2 = 2t^2 - 6t + 13 \\ &= 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 13 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

Par suite, $AM = \sqrt{2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2}}$. Mais alors, $AM \geq \sqrt{\frac{17}{2}}$ avec égalité obtenue pour $t = \frac{3}{2}$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la distance du point A à la droite } \mathscr{D} \text{ est } \sqrt{\frac{17}{2}}.}$$

EXERCICE 3

1) ***Restitution organisée de connaissances***

a) Soit $t \geq 0$.

$$R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - (-e^{-\lambda t} + e^0) = 1 + e^{-\lambda t} - 1 = e^{-\lambda t}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \geq 0,\ R(t) = e^{-\lambda t}.}$$

b) Soient t et s deux réels positifs.

$$P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P((X > t) \cap (X > t+s))}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{R(t+s)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+s-t)} = e^{-\lambda s}.$$

En particulier, $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas de t et donc

$$\boxed{\text{la variable } X \text{ suit une loi de durée de vie sans vieillissement.}}$$

2) **a)** D'après la question 1)a), $P(X > 1000) = e^{-0,00026 \times 1000} = e^{-0,26} = 0,77$ à 10^{-2} près puis $P(X \leq 1000) = 1 - P(X > 1000) = 1 - e^{-0,26} = 0,23$ à 10^{-2} près.

$$\boxed{P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0,26} \text{ et } P(X > 1000) = e^{-0,26}.}$$

b) La probabilité demandée est $P_{X>1000}(X > 1000+1000)$. D'après la question 1)b), cette probabilité est aussi $P(X > 1000)$ ou encore $e^{-0,26}$.

$$\boxed{P_{X>1000}(X > 2000) = e^{-0,26}.}$$

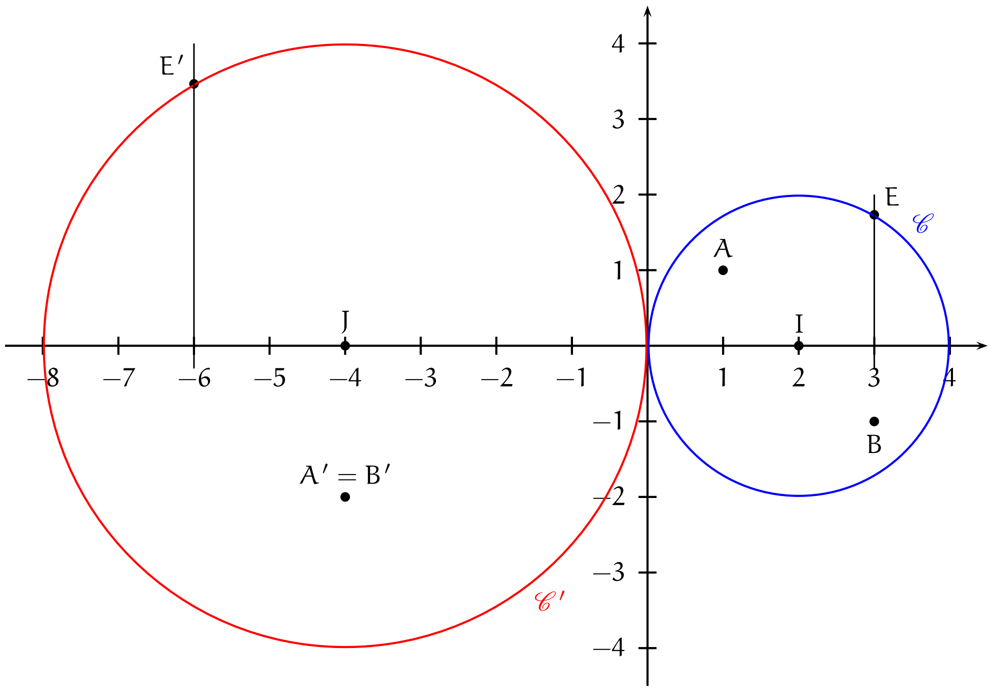
c) . La probabilité demandée est $P_{X>2000}(X \leq 3000)$. Or

$$P_{X>200}(X \leq 3000) = 1 - P_{X>200}(X > 3000) = 1 - P(X > 1000) = 1 - e^{-0,26}.$$

$$\boxed{P_{X>2000}(X \leq 3000) = 1 - e^{-0,26}.}$$

EXERCICE 4

1)



2) $z_{A'} = z_A^2 - 4z_A = (1+i)^2 - 4(1+i) = 1 + 2i - 1 - 4 - 4i = -4 - 2i$.
$z_{B'} = z_B^2 - 4z_B = (3-i)^2 - 4(3-i) = 9 - 6i - 1 - 12 + 4i = -4 - 2i$.
On note que $z_{A'} = z_{B'}$ ou encore que les points A et B ont même image.

$$\boxed{z_{A'} = z_{B'} = -4 - 2i.}$$

3) Soit z un nombre complexe.

$$z' = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (E).$$

Le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = (2i)^2.$$

L'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir les nombres $z_1 = \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 - i$.

$$\boxed{\text{Les points d'image le point d'affixe } -5 \text{ sont les points d'affixe } 2+i \text{ et } 2-i.}$$

4) **a)** Soit z un nombre complexe. $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$.

b) Par suite, $|z' + 4| = |(z-2)^2| = |z-2|^2$. D'autre part, si $z \neq 2$ alors $z - 2 \neq 0$ et $z' + 4 \neq 0$ et de plus, $\arg(z' + 4) = \arg((z-2)^2) = 2\arg(z-2)\ [2\pi]$.

c) Soit M un point du plan.

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 = 4 \Leftrightarrow |z'+4| = 4 \Leftrightarrow M' \in \mathscr{C}',$$

où $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre le point J d'affixe -4 et de rayon 4. On note que $J = I'$.

$$\boxed{\text{Quand } M \text{ décrit } \mathscr{C},\ M' \text{ décrit le cercle } \mathscr{C}' \text{ de centre le point d'affixe } -4 \text{ et de rayon } 4.}$$

5) **a)** $z_E - z_I = (2 + 2e^{i\pi/3}) - 2 = 2e^{i\pi/3}$ et donc $IE = |z_E - z_I| = 2$ et $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{IE}\right) = \arg(z_E - z_I) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

$$\boxed{IE = 2 \text{ et } \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{IE}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi].}$$

b) D'après la question 4)b), $JE' = |z' + 4| = |z - 2|^2 = 4$ et $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{JE'}\right) = \arg(z_{E'} - z_J) = 2\arg(z_E - z_I) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

$$\boxed{JE' = 4 \text{ et } \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{JE'}\right) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].}$$

c) Voir graphique.

