BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Centres étrangers

EXERCICE 1

1)	**Vrai**
2)	**Faux**
3)	**Vrai**
4)	**Faux**
5)	**Faux**
6)	**Faux**
7)	**Vrai**
8)	**Vrai**

Explications.

1) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, -3, 4)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles ou encore les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés et donc que ces points définissent un plan et un seul.

2) $x_C - 2y_C + z_C + 1 = 0 + 4 + 3 + 1 = 8 \neq 0$. Donc $C \notin \mathscr{P}$ et par suite $(AC) \not\subset \mathscr{P}$.

3) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AD}(-1, 0, -1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et D définissent un plan et un seul.
• $x_A + 8y_A - z_A - 11 = 2 + 8 + 1 - 11 = 0$ et donc A appartient au plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$.
• $x_B + 8y_B - z_B - 11 = -1 + 16 - 4 - 11 = 0$ et donc B appartient au plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$.
• $x_D + 8y_D - z_D - 11 = 1 + 8 + 2 - 11 = 0$ et donc D appartient au plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$.
Le plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$ est bien le plan (ABD).

4) S'il existe un réel k tel que $x_C = 2k$, on a $2k = 0$ puis $k = 0$. Mais alors $2 + 3k = 2 \neq -2 = y_C$. Donc le point C n'appartient pas à la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{array}\right.$ et cette droite n'est pas la droite (AC).

5) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(1, 3, -5)$. De plus

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (-3) \times 1 + 1 \times 3 + 5 \times (-5) = -25 \neq 0.$$

Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales.

6) $d(C, \mathscr{P}) = \dfrac{|x_C - 2y_C + z_C + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{|4 + 3 + 1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{8\sqrt{6}}{6} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3} \neq 4\sqrt{6}$.

7) $d(D, \mathscr{P}) = \dfrac{|x_D - 2y_D + z_D + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{|1 - 2 - 2 + 1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Ainsi, la distance du centre de la sphère au plan $\mathscr{P}$ est égale au rayon de cette sphère et on sait que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à cette sphère.

8) D'une part, $x_E - 2y_E + z_E + 1 = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{3} + 1 = 0$ et donc le point E appartient au plan $\mathscr{P}$.

D'autre part, un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, -2, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$. On a donc $\overrightarrow{EC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{n}$. Par suite le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est bien colinéaire au vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et finalement le point E est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 2

1) Le discriminant de l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 8 = -16 = (4i)^2$.
L'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$ admet donc deux racines non réelles conjuguées à savoir

$$z_1 = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = -2-2i.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-2-2i, -2+2i\}.}$$

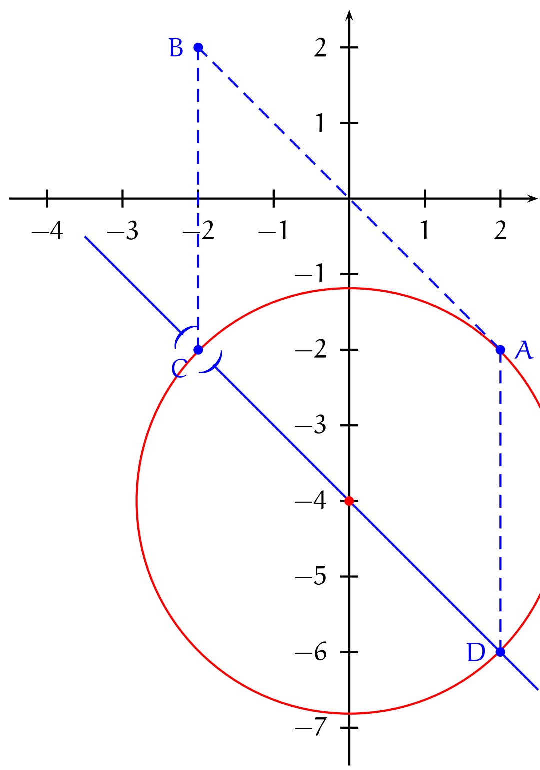
On a $|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$. Mais alors

$$z_1 = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}.$$

D'autre part, $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}, 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}\}.}$$

2)



a) Soient θ un réel et Ω un point dont l'affixe est notée ω. L'expression complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Ici, $\omega = 0$ et $e^{i\theta} = e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$. Donc

$$c = ib = i(-2+2i) = -2-2i.$$

$$\boxed{c = -2-2i.}$$

b) Dans cette question $\omega = a = 2-2i$ et $e^{i\theta} = e^{i\pi/2} = i$. Donc

$$d = i(c-a)+a = i((-2-2i)-(2-2i))+2-2i = 2-6i.$$

$$\boxed{d = 2-6i.}$$

c) $a-b = a+a = 2a = 4-4i$ et $d-c = (2-6i)-(-2-2i) = 4-4i$. Donc $a-b = d-c$ ou encore $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère } ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

3) a) Soit α un réel non nul. Puisque $1-1+\alpha = \alpha \neq 0$, G_α est bien défini. Ensuite, on sait que pour tout point M du plan on a

$$\overrightarrow{MG_\alpha} = \frac{1}{1-1+\alpha}\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \alpha\overrightarrow{MC}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\overrightarrow{BA} + \alpha\overrightarrow{MC}\right).$$

Quand $M = C$, on obtient

$$\boxed{\overrightarrow{CG_\alpha} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA}.}$$

b) Quand α décrit $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{\alpha}$ décrit $\mathbb{R}^*$ et donc le point G_α décrit la droite passant par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ privée du point C ou encore, la droite (CD) privée du point C.

$$\boxed{\text{Quand } \alpha \text{ décrit } \mathbb{R}^*,\ G_\alpha \text{ décrit la droite } (CD) \text{ privée du point } C.}$$

c) Quand $\alpha = 1$, on obtient $\overrightarrow{CG_1} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et donc

$$\boxed{G_1 = D.}$$

4) Pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1-1+2)\overrightarrow{MG_2} = 2\overrightarrow{MG_2}$ et donc

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\left\|\overrightarrow{MG_2}\right\| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow MG_2 = 2\sqrt{2}.$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre G_2 et de rayon $2\sqrt{2}$. Maintenant, d'après la question 3)a), $\overrightarrow{CG_2} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et donc G_2 est le milieu du segment $[CD]$. D'autre part,

$$CD = |d-c| = |4-4i| = 4|1-i| = 4\sqrt{1^2+(-1)^2} = 4\sqrt{2},$$

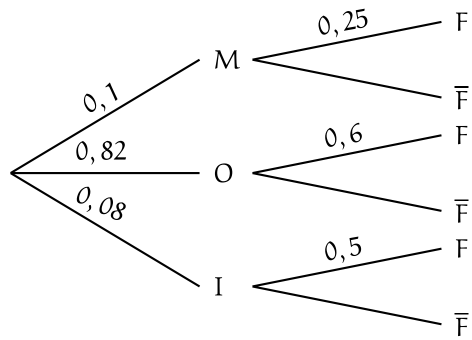
et donc $2\sqrt{2} = \dfrac{CD}{2}$. L'ensemble cherché est donc le cercle de centre le milieu de $[CD]$ et de rayon $\dfrac{CD}{2}$ ou encore

$$\boxed{\text{l'ensemble cherché est le cercle de diamètre } [CD].}$$

EXERCICE 3

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre.



2) **a)** $p(M) = 1 - p(I) - p(O) = 1 - 0,08 - 0,82 = 0,1$.

$$\boxed{p(M) = 0,1.}$$

b) La probabilité demandée est $p(M \cap F)$. Or

$$p(M \cap F) = p(M) \times p_M(F) = 0,1 \times 0,25 = 0,025.$$

$$\boxed{p(M \cap F) = 0,025.}$$

c) La probabilité demandée est $p(F)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(F) = p(M \cap F) + p(O \cap F) + p(I \cap F) = p(M) \times p_M(F) + p(O) \times p_O(F) + p(I) \times p_I(F) = \\ 0,1 \times 0,25 + 0,82 \times 0,6 + 0,08 \times 0,5 = 0,025 + 0,492 + 0,04 = 0,557.$$

$$\boxed{p(F) = 0,557.}$$

Partie B

1) La probabilité demandée est $p(A \cap B)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire que $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$ et donc

$$p(A \cap B) = p(B) - p(\overline{A} \cap B) = 0,04 - 0,003 = 0,037.$$

$$\boxed{p(A \cap B) = 0,037.}$$

2) La probabilité demandée est $p(A)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = 0,037 + 0,002 = 0,039.$$

$$\boxed{p(A) = 0,039.}$$

3) La probabilité demandée est $p_A(B)$.

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,037}{0,039} = 0,95 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$\boxed{p_A(B) = 0,95 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

EXERCICE 4

Partie A. Restitution organisée de connaissances

1) Pour tout réel $x > 1$,

$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}/\ln(x)}.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)} = +\infty$. Mais alors, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\ln(x)}/\ln(x)} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.}$$

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$. Par suite, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.}$$

Partie B. Etude d'une fonction f

1) a) La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, on a

$$u'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$$

b) $u(1) = 1^3 - 1 + 2\ln(1) = 1 - 1 + 0 = 0$.
Soit alors x un réel strictement positif. Comme la fonction u est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que
- si $x < 1$, $u(x) < u(1)$ ou encore $u(x) < 0$,
- si $x > 1$, $u(x) > u(1)$ ou encore $u(x) > 0$.

On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est strictement négative sur }]0, 1[, \text{ strictement positive sur }]1, +\infty[\text{ et s'annule en } 1.}$$

2) Etude de la fonction f

a) Limite en 0. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) \times \frac{1}{x^2} = -\infty$$

et donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{\ln(x)}{x^2} = +\infty$. D'autre part, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$ et finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty.}$$

Limite en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.}$$

b) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$f'(x)=1-\left(\ln(x)\times\frac{1}{x^2}\right)'=1-\left(\frac{1}{x}\times\frac{1}{x^2}+\ln(x)\times\frac{-2}{x^3}\right)=\frac{x^3-1+2\ln(x)}{x^3}=\frac{u(x)}{x^3}.$$

Pour tout réel $x>0$, on a $x^3>0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$ pour tout réel $x>0$. Ce signe a été étudié à la question 1)b) et on en déduit le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

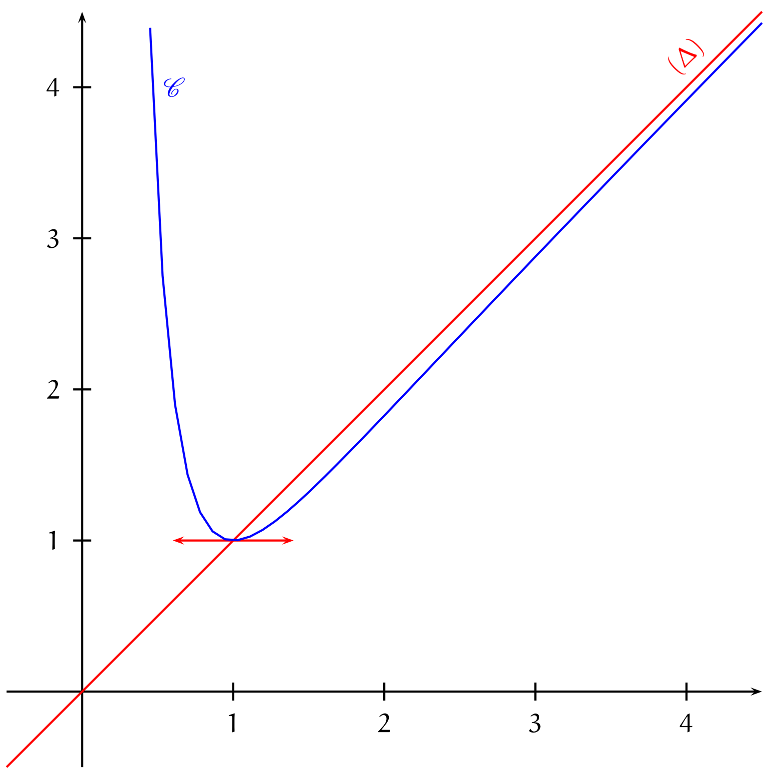
3) Eléments graphiques et tracés

a) Pour tout réel $x>0$, $f(x)-x=-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$. Mais alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y=x \text{ est asymptote à la courbe } \mathscr{C} \text{ en } +\infty.}$$

b) La position relative de $\mathscr{C}$ est (Δ) est donnée par le signe de $f(x)-x$. Or, pour tout réel $x>0$, $f(x)-x=-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ est du signe de $-\ln(x)$ et donc $f(x)-x>0$ pour $x\in]0,1[$ et $f(x)-x<0$ pour $x\in]1,+\infty[$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de (Δ) sur $]0,1[$ et strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$. Enfin, $\mathscr{C}$ et (Δ) se coupent en leur point d'abscisse 1 c'est-à-dire au point de coordonnées $(1,1)$.

c) Graphe.



Partie C. Calculs d'aires

1) a) Soit $\alpha > 1$. D'après la question B - 3)b), la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite (Δ) sur $[1, \alpha]$. Puisque f est continue sur $[1, \alpha]$, on a

$$\mathscr{A}(\alpha) = \int_1^\alpha (x - f(x))\, dx = \int_1^\alpha \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx.$$

Calculons alors $\mathscr{A}(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties.
Les deux fonctions $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sont définies et dérivables sur le segment $[1, \alpha]$ et pour tout réel x de $[1, \alpha]$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur le segment $[1, \alpha]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et en posant

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x) & v(x) = -\dfrac{1}{x} \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\alpha) &= \int_1^\alpha \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx = \left[\ln(x) \times \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right)\, dx = -\frac{\ln(\alpha)}{\alpha} + \frac{\ln(1)}{1} + \int_1^\alpha \frac{1}{x^2}\, dx \\ &= -\frac{\ln(\alpha)}{\alpha} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\alpha = -\frac{\ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1 = 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \alpha > 1,\ \mathscr{A}(\alpha) = 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}.}$$

b) $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} = 0$ et $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}(\alpha) = 1$.

$$\boxed{\ell = 1.}$$

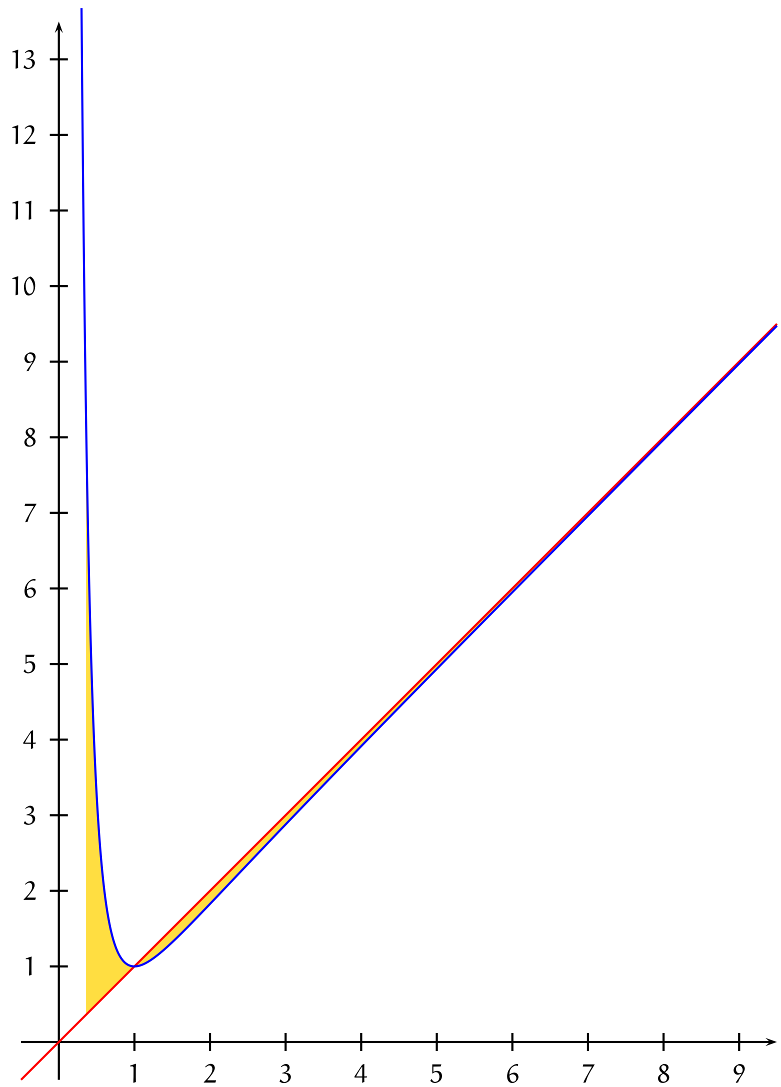
2) D'après la question B - 3)b), la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite (Δ) sur $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$. Puisque f est continue sur $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$, on a

$$\mathscr{A}\left(\frac{1}{e}\right) = \int_{1/e}^1 (f(x) - x)\, dx = -\int_{1/e}^1 \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx.$$

Le calcul de la question 1)a) peut alors être réutilisé avec $\alpha = \dfrac{1}{e}$ et après deux changements de signe, on obtient

$$\mathscr{A}\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{\ln(1/e)}{1/e} - \frac{1}{1/e} = 1 - \frac{-1}{1/e} - \frac{1}{1/e} = 1 + e - e = 1 = \ell.$$

$$\boxed{\ell = \mathscr{A}\left(\frac{1}{e}\right) = 1.}$$



13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

