BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A - Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple : une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations.

- $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
- L'écriture $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$ signifie que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ n'ont aucun point commun.

1) Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing \text{ et } \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing,$$

alors on peut en conclure que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$.

2) Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing,$$

alors on peut en conclure que $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont tels que :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing \text{ et } \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing.$$

3) Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$.

4) Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace vérifiant ;

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing,$$

alors on peut en conclure que $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing$.

Partie B

Dans un repère orthonormal de l'espace, on considère les trois plans suivants :

- $\mathscr{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$;
- $\mathscr{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$;
- $\mathscr{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1) Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants, puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ.

2) En déduire la nature de l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère plusieurs sacs de billes S_1, S_2, ..., S_n, ... tels que :

- le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
- chacun de suivants, S_2, S_3, ..., S_n, ... contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille dans S_1 ;
- on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;
- on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;
- etc ...

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1) Mise en évidence d'une relation de récurrence

a) D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$ et $p_{\overline{E_1}}(E_2)$. En déduire la valeur de $p(E_2)$.

b) A l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2) Etude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{2}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} \text{ pour tout } n \geqslant 1 \end{array}\right. .$$

a) Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3) Evolution des probabilités $p(E_n)$

a) A l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.

b) Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on $0{,}499\ 99 \leqslant p(E_n) \leqslant 0,5$?

EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour le dessin $\|\overrightarrow{u}\| = 4$ cm.
M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que :

$$z' = -\frac{1}{\overline{z}}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

Partie A. Quelques propriétés

1) Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z', puis une relation entre les arguments de z et z'.

2) Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.

3) Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul, on a l'égalité :

$$\overline{z' + 1} = \frac{1}{z}(z - 1).$$

Partie B. Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe vérifie :

$$|z - 1| = 1.$$

1) Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$?

2) Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'affixe z, distinct du point O.

a) Démontrer que $|z' + 1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

b) Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité $|z' + 1| = |z'|$, alors z vérifie l'égalité $|z - 1| = 1$?

3) Tracer l'ensemble $\mathscr{C}$ sur une figure. Si M est un point de $\mathscr{C}$, décrire et réaliser la construction du point M'.

EXERCICE 4 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

Partie B. Restitution organisée de connaissances

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.
On prendra 4 cm pour unité graphique.

1) *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Etudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variation le plus complet possible.

2) Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

Partie C. Etude d'une famille de fonctions
Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.
On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la **partie B**, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.

1) **a)** Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.

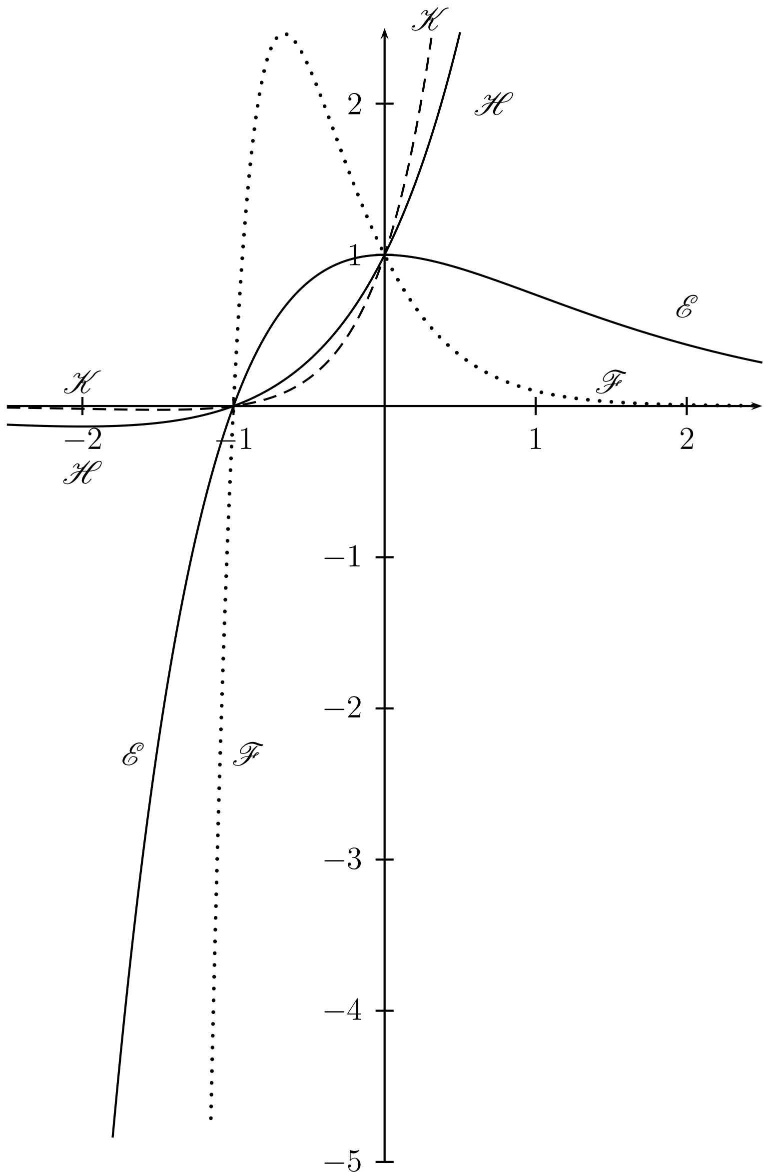
2) Etudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression :

$$(x+1)(e^x - 1).$$

En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

3) Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k.
(On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

4) Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.
Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



Partie D. Calcul d'une aire plane

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est celle définie dans la **partie B**.

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer le nombre :

$$\mathscr{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(t)\, dt.$$

2) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat.