BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Antilles Guyanne

EXERCICE 1

Partie A

1) Pour $a \in \mathbb{R}$ donné, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$. Ici $a = -2$ et donc

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } (E') \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto ke^{-2x},\ k \in \mathbb{R}.}$$

2) En particulier, quand $k = \dfrac{9}{2}$ on obtient

$$\boxed{\text{la fonction } k\ :\ x \mapsto \frac{9}{2}e^{-2x} \text{ est solution de l'équation } (E') \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

3) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$g'(x) + 2g(x) = -3 \times (-3e^{-3x}) + 2 \times (-3e^{-3x}) = 9e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x}.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } g\ :\ x \mapsto -3e^{-3x} \text{ est solution de l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

4) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$f'(x) + 2f(x) = (g+h)'(x) + 2(g+h)(x) = (g'(x) + 2g(x)) + (h'(x) + 2h(x)) = 3e^{-3x} + 0 = 3e^{-3x},$$

et donc

$$\boxed{f \text{ est solution de l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Partie B

1) Pour tout réel x, on a $3e^{-2x} \neq 0$ et donc

$$f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = 3e^{-2x}\frac{\frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}}{3e^{-2x}} = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-3x+2x}\right) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right).$$

2) • **Limite en $+\infty$.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{9}{2} \times 0 - 3 \times 0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

• **Limite en $-\infty$.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{-2x} = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{2} - e^{-x} = -\infty$.

En résumé, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{2} - e^{-x} = -\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{9}{2} \times (-2e^{-2x}) - 3 \times (-3e^{-3x}) = -9e^{-2x} + 9e^{-3x} = 9e^{-3x}(-e^{x} + 1).$$

Pour tout réel x, $9e^{-3x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $-e^{x} + 1$. Or

- si $x > 0$, $e^{x} > 1$ et donc $f'(x) < 0$,
- si $x = 0$, $e^{x} = 1$ et donc $f'(x) = 0$,
- si $x < 0$, $e^{x} < 1$ et donc $f'(x) > 0$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	0

$$f(0) = \frac{9}{2}e^{0} - 3e^{0} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

4) • $f(0) = \dfrac{3}{2}$ et donc $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe (Oy) au point de coordonnées $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

• Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe (Ox) sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = 0 \Leftrightarrow 3e^{-3x}\left(\frac{3}{2}e^{x} - 1\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{x} - 1 = 0 \text{ (car } 3e^{-3x} \neq 0) \\
&\Leftrightarrow e^{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}$$

$\mathscr{C}_f$ coupe l'axe (Ox) au point de coordonnées $\left(\ln\left(\dfrac{2}{3}\right), 0\right)$.

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ coupe l'axe } (Ox) \text{ au point de coordonnées } \left(\ln\left(\frac{2}{3}\right), 0\right) \text{ et l'axe } (Oy) \text{ au point de coordonnées } \left(0, \frac{3}{2}\right).}$$

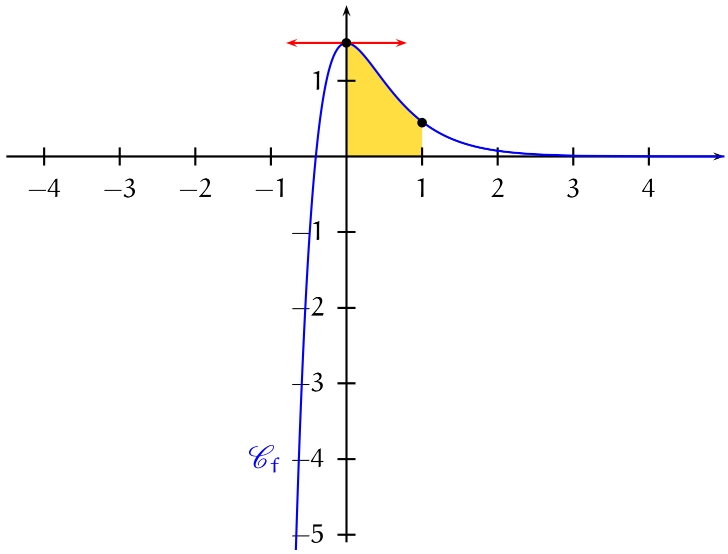
5) $f(1) = \dfrac{9}{2}e^{-2} - 3e^{-3} = 0,459\ldots$
Voir graphique page suivante.

6) L'unité d'aire est égale à 1 cm^2.
La fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$. On en déduit que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et en particulier sur l'intervalle $[0, 1]$. De plus, f est continue sur cet intervalle et donc $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\ dx &= \left[\frac{9}{2} \times \frac{e^{-2x}}{-2} - 3 \times \frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^1 = \left[-\frac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x}\right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3}\right) - \left(-\frac{9}{4} + 1\right) = \frac{5}{4} - \frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{5}{4} - \frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3} = 0,995\ldots \text{ cm}^2.}$$



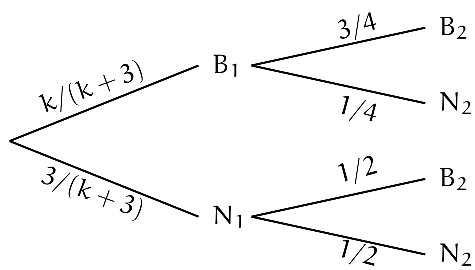
EXERCICE 2

1) a) L'urne U_1 contient $k+3$ boules et donc $p(B_1) = \dfrac{k}{k+3}$ et $p(N_1) = \dfrac{3}{k+3}$. Ensuite,

• si l'événement B_1 est réalisé, l'urne U_2 contient 4 boules dont 3 blanches et une noire. Donc $p_{B_1}(B_2) = \dfrac{3}{4}$ et $p_{B_1}(N_2) = \dfrac{1}{4}$.

• si l'événement N_1 est réalisé, l'urne U_2 contient 4 boules dont 2 blanches et 2 noires. Donc $p_{N_1}(B_2) = \dfrac{1}{2}$ et $p_{N_1}(N_2) = \dfrac{1}{2}$.

On peut alors compléter l'arbre de l'énoncé :



b) La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(B_2) = \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{k+3} \times \frac{1}{2} = \frac{3k+6}{4(k+3)} = \frac{3k+6}{4k+12}.$$

$$\boxed{p(B_2) = \frac{3k+6}{4k+12}.}$$

2) Quand $k = 12$, $p(B_2) = \dfrac{42}{60} = \dfrac{7}{10} = 0,7$ et donc $p(N_2) = 1 - p(B_2) = 0,3$.

a) Si le joueur gagne, son gain algébrique est $12 - 8 = 4$ euros et s'il perd, son gain algébrique est $0 - 8 = -8$ euros. Donc les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
b) La loi de probabilité de X est

x_i	4	-8
$p(X = x_i)$	$0,7$	$0,3$

c) $E(X) = 0,7 \times 4 + 0,3 \times (-8) = 2,8 - 2,4 = 0,4$.

$$\boxed{E(X) = 0,4.}$$

d) Puisque $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur.

3) Notons Y le nombre de fois que l'événement B_2 est réalisé. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,
- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'événement B_2 est réalisé » avec une probabilité $p = 0,7$ ou « l'événement N_2 est réalisé » avec une probabilité $1 - p = 0,3$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,7$.

La probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 est $p(Y \geq 1)$. Or

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,3^n.$$

Soit alors n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
1 - 0,3^n \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - 0,99 \geq 0,3^n \Leftrightarrow 0,3^n \leq 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln(0,3^n) \leq \ln(0,01) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,3) \leq \ln(0,01) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,3)} \text{ (car } \ln(0,3) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geq 3,8\ldots \Leftrightarrow n \geq 4 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le plus petit entier cherché est 4.}}$$

EXERCICE 3

1)

1)	**A**
2)	**C**
3)	**B**
4)	**C**

Explications.

1) Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble considéré. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\left\{\begin{array}{l}2x-6y+2z-7=0\\ -x+3y-z+5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x-3y+z=\dfrac{7}{2}\\ x-3y+z=5\end{array}\right.$$

Comme $\dfrac{7}{2} \neq 5$, $\mathscr{E} = \varnothing$.

2) Notons (D) et (D') les droites considérées. (D) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(-1, 1, -3)$ et (D') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}'(1, -1, 2)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles et donc sont soit sécantes, soit non coplanaires.
Déterminons alors l'intersection de (D) et (D'). Soient $M(1-t, -1+t, 2-3t)$ et $M'(2+t', -2-t', 4+2t')$, $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$, des points de (D) et (D') respectivement.

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}1-t=2+t'\\ -1+t=-2-t'\\ 2-3t=4+2t'\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}t'=-t-1\\ -1+t=-2-(-t-1)\\ 2-3t=4+2(-t-1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}t'=-t-1\\ 0t=0\\ t=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}t=0\\ t'=-1\end{array}\right.$$

Quand $t = 0$ et $t' = -1$, on obtient un point commun $A(1, -1, 2)$ et les droites (D) et (D') sont sécantes en A.

3) Notons (P) le plan considéré.

$$d(A, (P)) = \frac{|-1+3\times(-2)-1+5|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

4) Notons H le projeté orthogonal de B sur (P) puis (x, y, z) les coordonnées de H.
Un vecteur normal à (P) est le vecteur $\overrightarrow{n}(-1, 3, -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$. Par suite, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{n}$. Ceci fournit $\left\{\begin{array}{l}x=1-k\\ y=6+3k\\ z=-k\end{array}\right.$. Maintenant

$$H \in (P) \Leftrightarrow -(1-k)+3(6+3k)-(-k)+5=0 \Leftrightarrow 11k+22=0 \Leftrightarrow k=-2.$$

Pour $k = -2$, on obtient les coordonnées de H : $(3, 0, 2)$.

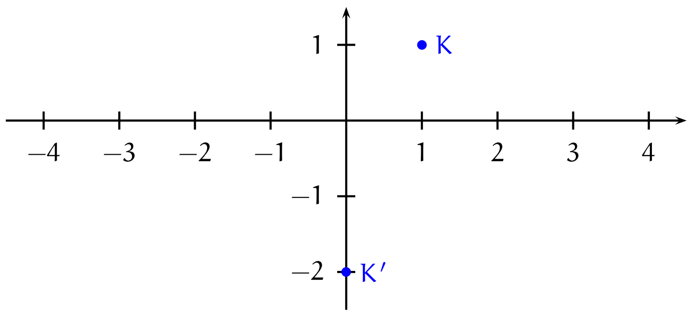
EXERCICE 4

1) a) voir plus loin

b) $z_{K'} = \dfrac{-(1+i)^2}{(1+i)-i} = \dfrac{-(1+2i-1)}{1} = -2i.$

$$\boxed{z_{K'} = -2i.}$$

a) et c)



2) **a)** $z_{L'} = \dfrac{-\left(\dfrac{i}{2}\right)^2}{\dfrac{i}{2}-i} = \dfrac{1/4}{-i/2} = \dfrac{1}{-2i} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{i}{(-i)i} = \dfrac{i}{2}.$

$$\boxed{z_{L'} = \frac{i}{2}.}$$

En particulier $L' = L$ et donc le point L est invariant par f.

b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{-z^2}{z-i} = z \Leftrightarrow -z^2 = z(z-i) \Leftrightarrow 2z^2 - iz = 0 \Leftrightarrow z(2z-i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = \frac{i}{2}.$$

Comme 0 et $\dfrac{i}{2}$ appartiennent à $\mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\boxed{f \text{ admet exactement deux points invariants, les points } O \text{ et } L \text{ d'affixes respectives } 0 \text{ et } \frac{i}{2}.}$$

3) Un procédé de construction.

a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$g = \frac{1}{3}(z_A + z + z') = \frac{1}{3}\left(i + z - \frac{z^2}{z-i}\right) = \frac{(z+i)(z-i) - z^2}{3(z-i)} = \frac{z^2 - i^2 - z^2}{3(z-i)} = \frac{1}{3(z-i)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout complexe } z \in \mathbb{C} \setminus \{i\},\ g = \frac{1}{3(z-i)}.}$$

b) Soient r un réel strictement positif et M un point du cercle de centre A et de rayon r. Alors $|z-i| = r$ et en particulier, $z \neq i$. De plus,

$$OG = |g| = \left|\frac{1}{3(z-i)}\right| = \frac{1}{3|z-i|} = \frac{1}{3r}.$$

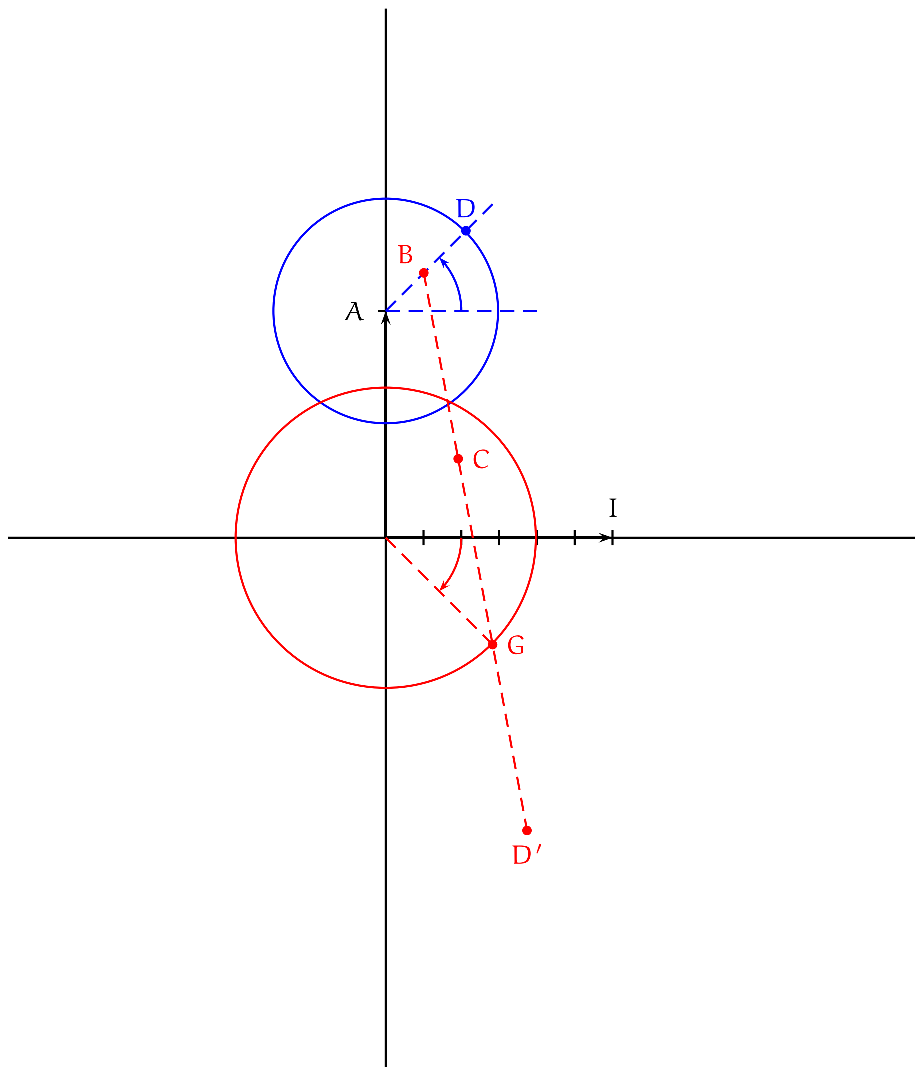
Donc G appartient au cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{3r}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$\arg(g) = \arg\left(\frac{1}{3(z-i)}\right) = -\arg(3(z-i)) = -\arg(z-i) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right).$$

$$\boxed{\arg(g) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right).}$$

d) Ici $r = \dfrac{1}{2}$. On construit alors G. G est sur le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{3r} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$ ce qui correspond à 4 graduations. D'autre part, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OG}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD}\right)$.



Il reste à construire le point D' tel que G soit le centre de gravité du triangle ADD'. On note B le milieu du segment[AD] puis C le milieu du segment [BG]. On sait alors que $\overrightarrow{BD'} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BG}$ ou encore $\overrightarrow{GD'} = \overrightarrow{CG}$ ou enfin D' est le symétrique de C par rapport à G.

