BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.**

EXERCICE 1 (5 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ».
L'événement contraire d'un événement E sera noté $\overline{\mathrm{E}}$.
La probabilité d'un événement E sera notée $p(\mathrm{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\mathrm{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.

   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1€ par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5€ ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

   a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance E(X).

   b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E(X)} < 0$.
   Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.
   Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre, dans l'ensemble **C** des nombres complexes, l'équation : $\bar{z}-3iz-3+6i=0$,

   $\bar{z}$ étant le conjugué de z.

2. On considère le point A d'affixe $4-2i$.

   Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3. Soit D le point d'affixe 2i.

   a) Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de 2i tels que :
   $\arg(z-2i)=\dfrac{\pi}{4}+k\times 2\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

   b) Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z=2i+2\,e^{i\theta}$,
   θ appartenant à **R**.

4. À tout point M d'affixe $z\neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\dfrac{z-1}{\bar{z}+2}$.

   Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z différente de -2 tels que $|z'|=1$.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A (1, 3, 2), B (4, 6, −4) et le cône (Γ) d'axe $(O,\vec{k})$, de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.

   a) Déterminer une équation de (P).

   b) Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).

3. Soit (Q) le plan d'équation $y=3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q).

   Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

   - deux droites parallèles ;
   - deux droites sécantes ;
   - une parabole ;
   - une hyperbole ;
   - un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x, y, z).

Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la **partie A**.

1. On considère l'équation (E) : $x^2+y^2=40$ où x et y sont des entiers relatifs.

   a) Résoudre l'équation (E).

   b) En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. a) Démontrer que si le point M de coordonnées (x, y, z) où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et x^2+y^2 est divisible par 10.

   b) Montrer que si M est un point de (C_2), intersection de (Γ) et de (Q),

   alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10.

   c) Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.

   d) Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+x\ln x$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire **A** du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

On note M et N les points de C_f d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses.
La figure est donnée en annexe, page 6.

1. a) Montrer que f est positive sur $[1, 2]$.
   b) Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est 2ln2.
   c) Soit E le point d'abscisse $\dfrac{4}{e}$.
   Montrer que, sur l'intervalle $[1, 2]$, le point E est l'unique point de C_f en lequel la tangente à C_f est parallèle à (MN).
   d) On appelle T la tangente à C_f au point E.
   Montrer qu'une équation de T est : $y=(2\ln 2)x-\dfrac{4}{e}+1$.
2. Soit g la fonction définie sur $[1, 2]$ par : $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\dfrac{4}{e}+1\right]$.
   a) Montrer que pour tout x de $[1, 2]$: $g'(x)=1+\ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$.
   b) Étudier les variations de g sur $[1, 2]$ et en déduire la position relative de C_f et de la tangente T sur cet intervalle.
3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T.
   On admet que la courbe C_f reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1, 2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.
   a) Calculer les aires des trapèzes MNQP et $M'N'QP$.
   b) En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de **A** d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de **A**.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\ln x\,dx$.
2. En déduire la valeur exacte de **A**.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie