

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2007

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

EXERCICE 1

1) Un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\vec{n}(1, 2, -1)$ et un vecteur normal au plan (P') est le vecteur $\vec{n}'(-1, 1, 1)$. De plus,

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 0.$$

On en déduit que

les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2) Puisque les plans (P) et (P') sont perpendiculaires, les plans (P) et (P') sont en particulier sécants en une droite. Vérifions alors que tout point de la droite (d) appartient à (P) et à (P').

Soit $M(-\frac{1}{3} + t, -\frac{1}{3}, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite (d). Puisque

$$\left(-\frac{1}{3} + t\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) - t + 1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = 0,$$

le point M appartient au plan (P) et puisque

$$-\left(-\frac{1}{3} + t\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + t = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0,$$

le point M appartient au plan (P'). Ainsi tout point de la droite (d) est un point de la droite (P) \cap (P') et finalement

$$(P) \cap (P') \text{ est la droite (d) de représentation paramétrique } \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}.$$

3) Calculons la distance du point A au plan (P).

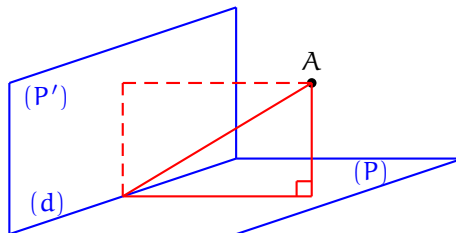
$$d(A, (P)) = \frac{|0 + 2 \times 1 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

De même

$$d(A, (P')) = \frac{|0 + 1 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$d(A, (P)) = \frac{2}{\sqrt{6}} \text{ et } d(A, (P')) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

4) Puisque les plans (P) et (P') sont perpendiculaires, la distance du point A à la droite (d) est fournie par le théorème de PYTHAGORE :



$$(d(A, (d)))^2 = (d(A, (P)))^2 + (d(A, (P')))^2 = \frac{4}{6} + \frac{4}{3} = 2,$$

et donc

la distance du point A à la droite (d) vaut $\sqrt{2}$.

EXERCICE 2

1) Restitution organisée de connaissances

Soient u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a; b]$ dont les dérivées sont continues sur l'intervalle $[a; b]$. On sait que la fonction uv est dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ et que $(uv)' = u'v + uv'$. Maintenant, les fonctions uv' et $u'v$ sont continues sur l'intervalle $[a; b]$ en tant que produit de fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$ et il en est de même de la fonction $(uv)'$. On peut donc intégrer sur l'intervalle $[a; b]$ et on obtient par linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx,$$

et donc

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) \, dx - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

On a démontré la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

2) a. Effectuons une intégration par parties dans l'intégrale I en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x & v(x) &= \sin(x) \\ u'(x) &= e^x & v'(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Donc, pour $x \in [0; \pi]$, posons $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0; \pi]$ et pour tout réel $x \in [0; \pi]$, $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x$. De plus les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0; \pi]$. On peut effectuer une intégration par parties et on obtient

$$I = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = e^\pi \sin \pi - e^0 \sin 0 - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = 0 - J = -J.$$

Mais on peut aussi poser

$$\begin{aligned} u(x) &= -\cos x & v(x) &= e^x \\ u'(x) &= \sin x & v'(x) &= e^x. \end{aligned}$$

et dans ce cas, la formule d'intégration par parties appliquée à l'intégrale I s'écrit :

$$I = [e^x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(-\cos x) \, dx = -e^\pi \cos \pi + e^0 \cos 0 + \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = J + e^\pi + 1.$$

$$I = -J \text{ et } I = J + e^\pi + 1.$$

b. On a donc $I = -I + e^\pi + 1$ puis $2I = e^\pi + 1$ puis $I = \frac{e^\pi + 1}{2}$ et enfin $J = -I = -\frac{e^\pi + 1}{2}$.

$$I = \frac{e^\pi + 1}{2} \text{ et } J = -\frac{e^\pi + 1}{2}.$$

EXERCICE 3

1)

$$\begin{aligned} \frac{z_H - z_A}{z_C - z_A} &= \frac{(-5) - (-5 + 6i)}{(3 - 2i) - (-5 + 6i)} = \frac{-6i}{8 - 8i} = \frac{6}{8} \times \frac{-i}{1 - i} = \frac{3}{4} \times \frac{-i(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{3}{4} \times \frac{1 - i}{2} \\ &= \frac{3}{8}(1 - i) = \frac{3\sqrt{2}}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{3\sqrt{2}}{8} e^{-i\pi/4}. \end{aligned}$$

Le calcul précédent montre que $AH = \frac{3\sqrt{2}}{8}AC$ et $(\vec{AC}, \vec{AH}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$. On a montré que

il existe une similitude directe de centre A et une seule transformant C en H à savoir la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2) a. Soient a et b deux nombres complexes puis s la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} s(A) = A \\ s(C) = C \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z_A = a\bar{z}_A + b \\ z_C = a\bar{z}_C + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 + 6i = a(-5 - 6i) + b \\ 3 - 2i = a(3 + 2i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (5 + 6i)a - 5 + 6i \\ 3 - 2i = a(3 + 2i) + (5 + 6i)a - 5 + 6i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a(8 + 8i) = 8 - 8i \\ b = (5 + 6i)a - 5 + 6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1 - i}{1 + i} \\ b = (5 + 6i)a - 5 + 6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\ b = (5 + 6i)a - 5 + 6i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1 - 2i - 1}{2} \\ b = (5 + 6i)a - 5 + 6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -i \\ b = (5 + 6i)(-i) - 5 + 6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -i \\ b = 1 + i \end{cases}. \end{aligned}$$

Le calcul précédent montre que

il existe une similitude indirecte et une seule laissant invariants les points A et C à savoir la similitude indirecte s d'écriture complexe $z' = -i\bar{z} + 1 + i$.

Puisque $|-i| = 1$, on sait que s est une isométrie indirecte. Puisque s admet au moins un point invariant, on sait que s est une réflexion. Puisque $s(A) = A$ et $s(C) = C$, on sait finalement que

s est la réflexion d'axe (AC).

b. D'après la question précédente

$$z_E = -i\bar{z}_H + 1 + i = -i \times (-5) + 1 + i = 1 + 6i.$$

$$z_E = 1 + 6i.$$

c. $FA = |z_A - z_F| = |(-5 + 6i) - (-2 + i)| = |-3 + 5i| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ et donc Γ est le cercle de centre F et de rayon $\sqrt{34}$. Or

$$FE = |z_E - z_F| = |(1 + 6i) - (-2 + i)| = |3 + 5i| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

et on a montré que

le point E est un point du cercle Γ .

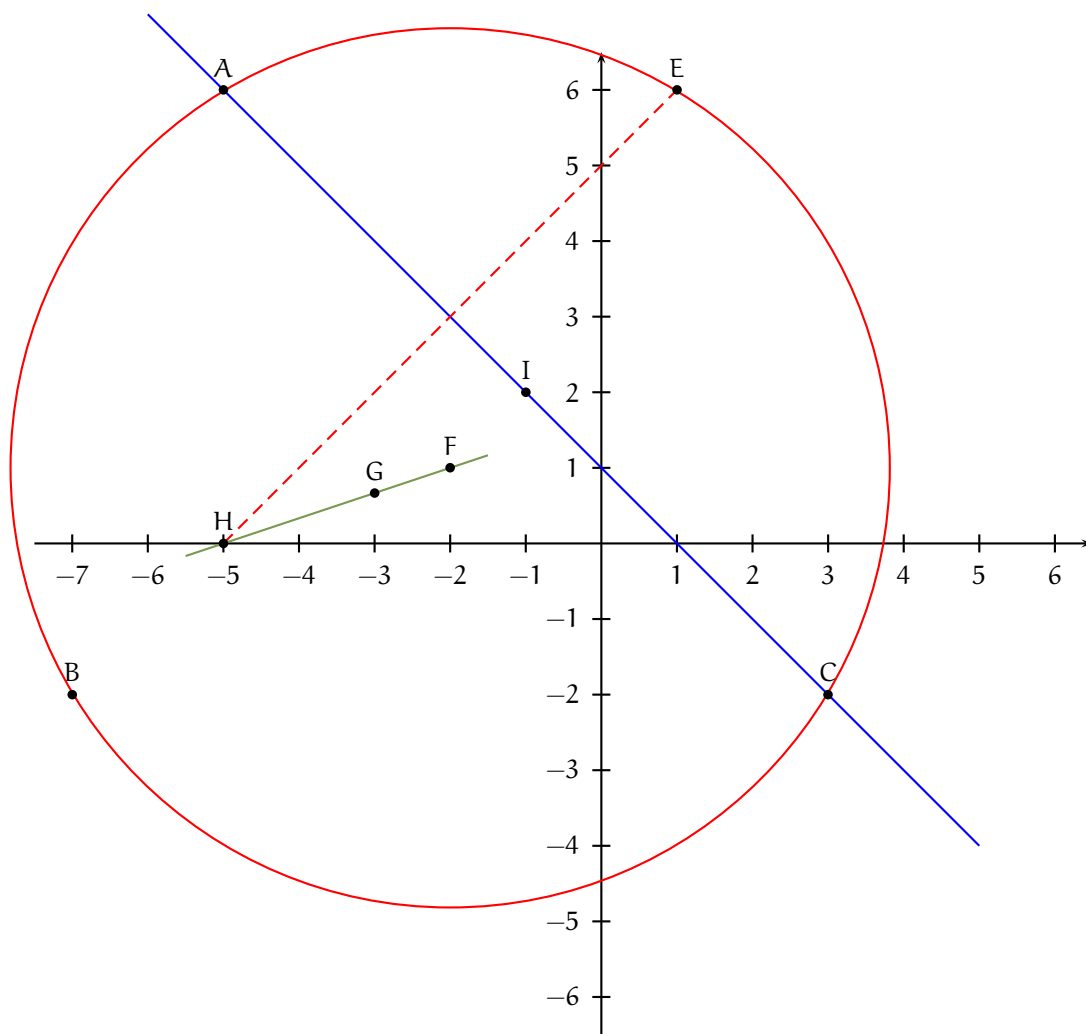
3) $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{(-5 + 6i) + (3 - 2i)}{2} = -1 + 2i$. Ensuite

$$z_G = \frac{2}{3}(z_I - z_B) + z_B = \frac{2}{3}((-1 + 2i) - (-7 - 2i)) - 7 - 2i = \frac{2}{3}(6 + 4i) - 7 - 2i = -3 + \frac{2}{3}i.$$

$$z_I = -1 + 2i \text{ et } z_G = -3 + \frac{2}{3}i.$$

$z_{\overrightarrow{HG}} = z_G - z_H = (-3 + \frac{2}{3}i) - (-5) = 2 + \frac{2}{3}i$ et $z_{\overrightarrow{HF}} = z_F - z_H = (-2 + i) - (-5) = 3 + i$. Mais alors $\frac{2}{3}z_{\overrightarrow{HF}} = 2 + \frac{2}{3}i = z_{\overrightarrow{HG}}$
ou encore $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HF}$. On a ainsi montré que

les points F, G et H sont alignés.



EXERCICE 4

- 1) d.
- 2) b.
- 3) b.
- 4) a.

Explications.

1) Notons X le nombre de personnes qui achètent le produit. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne achète le produit » avec une probabilité $p = 0,2$ ou « la personne n'accepte pas de répondre » avec une probabilité $1 - p = 0,8$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,2$. La probabilité demandée est $p(X = 2)$. Or

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} (0,2)^2 (0,8)^3 = \frac{5 \times 4}{2} \times 0,04 \times 0,512 = 0,2048.$$

$$p(X = 2) = 0,2048.$$

2) Notons

- G l'événement « l'élève interrogé est un garçon » de sorte que \bar{G} est l'événement « l'élève interrogé est une fille »
- P l'événement « l'élève interrogé a eu son permis du premier coup ».

L'énoncé donne $p(G) = \frac{1}{4}$ et donc $p(\bar{G}) = \frac{3}{4}$, $p_{\bar{G}}(P) = \frac{1}{3}$ et $p_G(P) = \frac{1}{10}$. La probabilité demandée est $p(P)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(P) = p(P \cap G) + p(P \cap \bar{G}) = p(G) \times p_G(P) + p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(P) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{40} = 0,275.$$

$$p(P) = 0,275.$$

3) La probabilité demandée est $p_P(G)$. Or

$$p_P(G) = \frac{p(P \cap G)}{p(P)} = \frac{p(G) \times p_G(P)}{p(P)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10}}{\frac{11}{40}} = \frac{1}{11} = 0,091 \text{ arrondi au millième.}$$

$$p_P(G) = 0,091 \text{ arrondi au millième.}$$

4) L'aire \mathcal{A} de la cible est égale à $\pi \times (30)^2 \text{ cm}^2$ ou encore $900\pi \text{ cm}^2$. L'aire \mathcal{A}_1 de la zone la plus éloignée du centre est égale à $(\pi \times (30)^2 - \pi \times (20)^2) \text{ cm}^2$ ou encore $500\pi \text{ cm}^2$. Puisque le tireur touche toujours la cible et que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone, la probabilité demandée est le rapport $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}}$ ou encore $\frac{5}{9}$.

$$\text{La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre vaut } \frac{5}{9}.$$

EXERCICE 5

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe \mathcal{C}

1) Pour $x > -1$, on a $x + 1 > 0$ et donc la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$. Par suite la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $] -1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $] -1, +\infty[$ et finalement f est dérivable sur $] -1, +\infty[$. De plus, pour $x > -1$,

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = 1 - \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

$$\text{Pour tout réel } x > -1, f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

2) La fonction N est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et pour $x > -1$, $N'(x) = 2(1+x) + \frac{1}{1+x} > 0$. Donc

la fonction N est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$.

$N(0) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$. Mais alors puisque la fonction N est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$, pour $-1 < x < 0$, $N(x) < N(0) = 0$ et pour $x > 0$, $N(x) > 0$. Enfin, puisque $(1+x)^2 > 0$, pour tout réel $x > -1$, $f'(x)$ est du signe de $N(x)$. On en déduit le

Tableau de variations de f .

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 $+$
f			

$$f(0) = 0 - \frac{\ln 1}{1} = 0$$

3) Les abscisses des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} d'équation $y = f(x)$ et de la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ sont les solutions de l'équation $f(x) = x$. Soit alors $x > -1$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x \Leftrightarrow \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

La courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} se coupent en $O(0,0)$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1) D'après la question 2) de la partie A, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;4]$. Soit alors x un réel.

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(4) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4 - \frac{\ln(5)}{5} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4.$$

Pour tout réel $x \in [0;4]$, $f(x) \in [0;4]$.

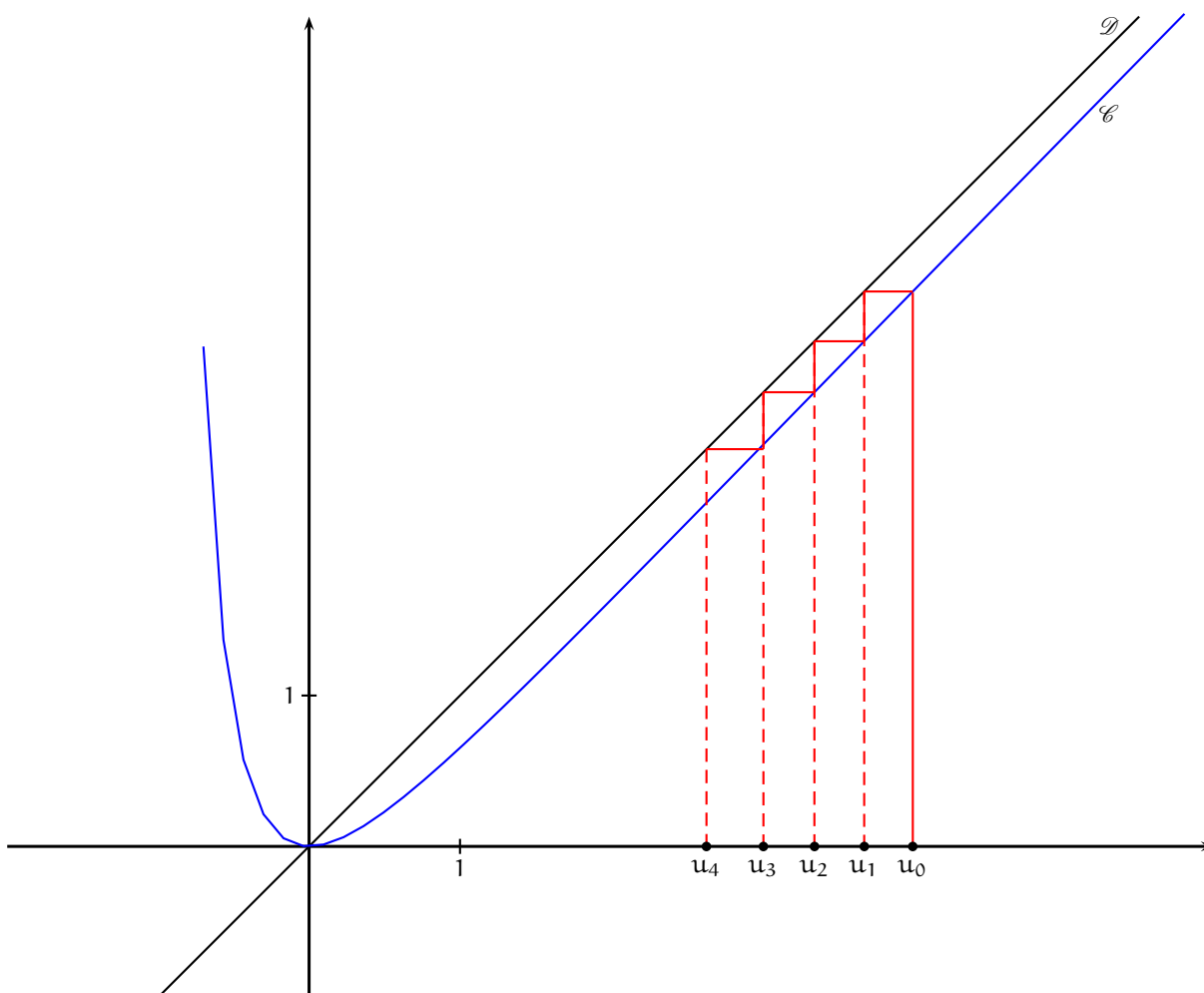
2) a. Voir graphique page suivante.

b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \in [0;4]$.

- Puisque $u_0 = 4 \in [0;4]$, la propriété à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [0;4]$. Alors d'après la question 1) de la partie B, $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;4]$.

On a ainsi montré par récurrence que

pour tout entier naturel n , $u_n \in [0;4]$.



c. Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = u_n - \frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n = -\frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} \leq 0 \text{ car } 1+u_n \geq 1.$$

Donc

la suite (u_n) est décroissante.

d. Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0), on en déduit que

la suite (u_n) est convergente.

e. Notons ℓ la limite de la suite (u_n) . Pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq 4$ et donc par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a $0 \leq \ell \leq 4$. Puisque la fonction f est continue sur $[0;4]$ et donc en ℓ , en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $f(\ell) = \ell$. La question 3) de la partie A permet alors d'affirmer que

$$\ell = 0.$$