# BACCALAUREAT GENERAL

## Session 2007

## MATHEMATIQUES

## - Série S -

## Enseignement Obligatoire

## Rochambeau

---

**EXERCICE 1**

| | |
|---|---|
| **Proposition 1** | **Faux** |
| **Proposition 2** | **Vrai** |
| **Proposition 3** | **Vrai** |

### Explications.

**1)** Notons $H'$ le point de coordonnées $(1, 11, 7)$. Un vecteur normal au plan $(P)$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 1, -3)$ et le vecteur $\overrightarrow{H'A}$ a pour coordonnées $(1, 9, 6)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{H'A}$ ne sont pas colinéaires et donc la droite $(H'A)$ n'est pas perpendiculaire au plan $(P)$. Par suite, $H'$ n'est pas le projeté orthogonal $H$ du point $A$ sur le plan $(P)$.

**2)** Soient $a$ et $b$ deux réels, $a$ étant non nul. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ sont donc les fonctions de la forme $f\ :\ x \mapsto Ce^{-2x} + 1$, $C \in \mathbb{R}$. De plus,

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^0 + 1 = 0 \Leftrightarrow C = -1.$$

Par suite, pour tout réel $x$ on a $u(x) = -e^{-2x} + 1$. Mais alors

$$u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = -e^{-\ln 2} + 1 = 1 - \frac{1}{e^{\ln 2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

**3)** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 7$.

• Puisque $u_0 = 2$, le résultat est vrai pour $n = 0$.
• Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 7$. Alors $u_{n+1}$ existe (car $7u_n \geq 0$), $u_{n+1}$ est positif (car $\sqrt{7u_n} \geq 0$) et enfin $u_{n+1} = \sqrt{7u_n} \leq \sqrt{7 \times 7} = 7$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 7$.

**EXERCICE 2**

**1) a)** Une écriture complexe de la rotation $r$ est $z' = e^{2i\pi/3}z$.

**b)** $z_C = e^{2i\pi/3}z_B = e^{2i\pi/3}e^{-5i\pi/6} = e^{i(2\pi/3-5\pi/6)} = e^{-i\pi/6}$.

$$\boxed{z_C = e^{-i\pi/6}.}$$

**c)** $z_B = e^{-5i\pi/6} = \cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $z_C = e^{-i\pi/6} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

$$\boxed{z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ et } z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.}$$

**d)** Voir figure à la fin du corrigé.

**2) a)**

$$z_D = \frac{1}{2-1+2}(2z_A - z_B + 2z_C) = \frac{1}{3}\left(2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$$\boxed{z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.}$$

**b)** $z_D = e^{i\pi/6}$ et donc $|z_D| = 1$. De même, $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$. Par suite,

$$\boxed{\text{A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.}}$$

**3) a)** Une écriture complexe de $h$ est $z' = 2(z-i)+i$ ou encore $z' = 2z - i$.

**b)** $z_E = 2z_D - i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) - i = \sqrt{3} + i - i = \sqrt{3}$.

$$\boxed{z_E = \sqrt{3}.}$$

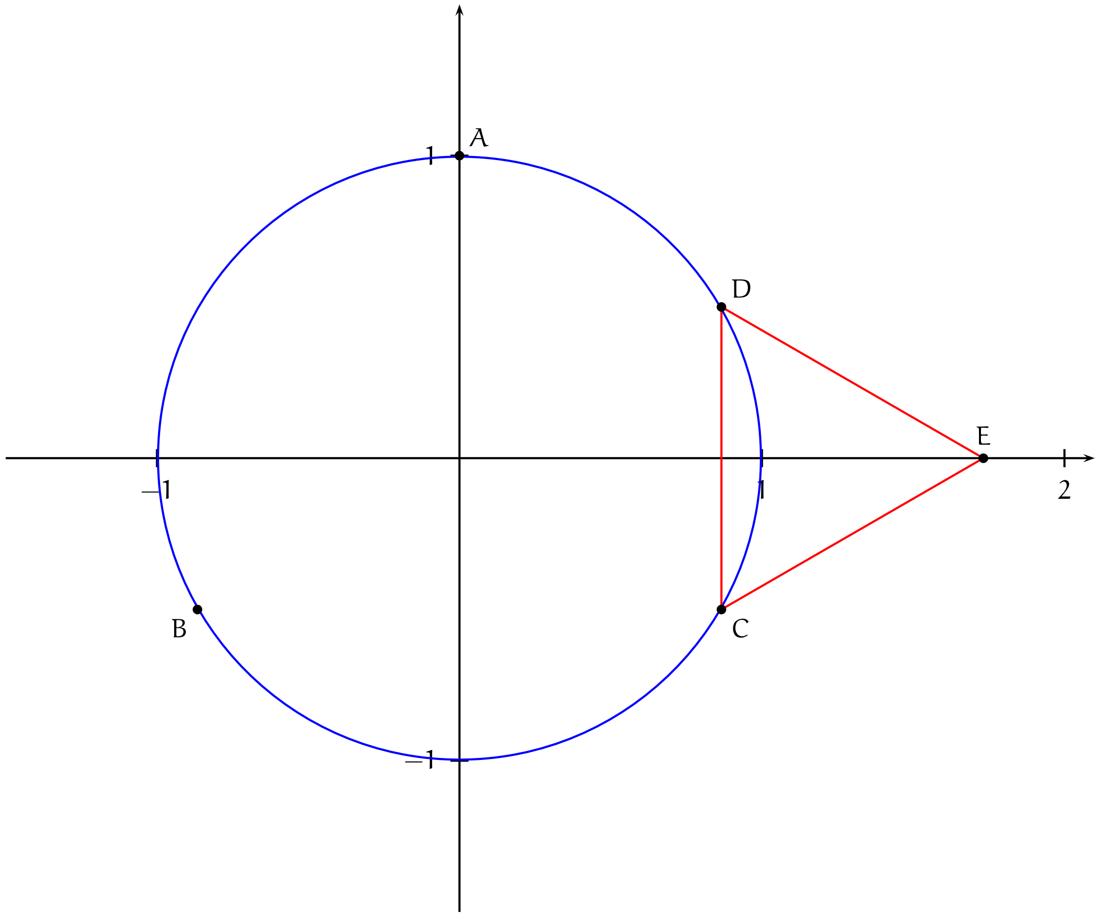
**4) a)** $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)}{\sqrt{3} - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)} = \dfrac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \dfrac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi/6}} = e^{i(\pi/2-\pi/6)} = e^{i\pi/3}$.

$$\boxed{\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\pi/3}.}$$

**b)** On a encore $z_D - z_C = e^{i\pi/3}(z_E - z_C)$ et donc le point D est l'image du point E par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On en déduit que

$$\boxed{\text{le triangle CDE est équilatéral.}}$$

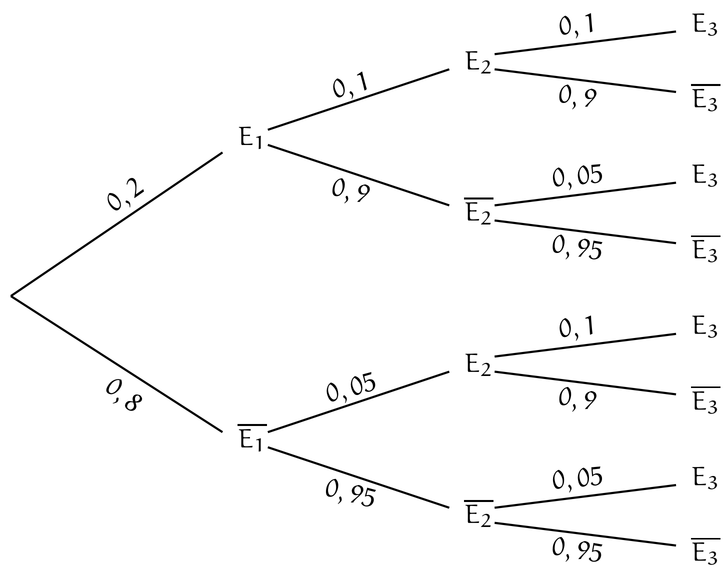
 


A
1
D
E
−1
1
2
B
C
−1

**EXERCICE 3**

**1)** Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré.




**a)** $X$ peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

**b)** On a

$$p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) = p(E_1 \cap E_2) \times p_{E_1 \cap E_2}(\overline{E_3}) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) \times p_{E_1 \cap E_2}(\overline{E_3}) = 0,2 \times 0,1 \times 0,9 = 0,018.$$

De même

$$p(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) = 0,2 \times 0,9 \times 0,05 = 0,009 \text{ et } p(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) = 0,8 \times 0,05 \times 0,1 = 0,004.$$

Par suite,

$$p(X = 2) = p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + p(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + p(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) = 0,018 + 0,009 + 0,004 = 0,031.$$

On a aussi

$$p(X = 3) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0,2 \times 0,1 \times 0,1 = 0,002.$$

$$\boxed{p(X = 2) = 0,031 \text{ et } p(X = 3) = 0,002.}$$

**c)**

$$p(X = 0) = p(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = 0,8 \times 0,95 \times 0,95 = 0,722$$

et

$$p(X = 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 2) - p(X = 3) = 1 - 0,722 - 0,031 - 0,002 = 0,245.$$

La loi de probabilité de $X$ est donc

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | 0,722 | 0,245 | 0,031 | 0,002 |

**d)** $E(X) = \Sigma x_i p(X = x_i) = 0 \times 0,722 + 1 \times 0,245 + 2 \times 0,031 + 3 \times 0,002 = 0 + 0,245 + 0,062 + 0,006 = 0,313.$

$$\boxed{E(X) = 0,313.}$$

**2)** **a)** Soit $n$ un entier naturel non nul.

$$p(E_n \cap E_{n+1}) = p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) = p_n \times 0,1 = 0,1p_n$$

et

$$p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = (1 - p_n) \times 0,05 = -0,05p_n + 0,05.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p(E_n \cap E_{n+1}) = 0,1p_n \text{ et } p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = -0,05p_n + 0,05.}$$

**b)** D'après la formule des probabilités totales on a alors

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = 0,1p_n - 0,05p_n + 0,05 = 0,05p_n + 0,05.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05.}$$

**3)** **a)** Soit $n$ un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{19} \\ &= 0,05p_n + 0,05 - \frac{1}{19} = 0,05(p_n + 1 - \frac{1}{19 \times 0,05}) = 0,05(p_n + \frac{0,95 - 1}{19 \times 0,05}) = 0,05(p_n - \frac{0,05}{19 \times 0,05}) \\ &= 0,05(p_n - \frac{1}{19}) = 0,05u_n. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)$ est donc une suite géométrique de raison $0,05$. De plus,

$$u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0,2 - \frac{1}{19} = \frac{1}{5} - \frac{1}{19} = \frac{14}{95}.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de premier terme } u_1 = \frac{14}{95} \text{ et de raison } q = 0,05.}$$

**b)** On sait alors que pour tout entier naturel non nul $n$, on a $u_n = u_1 \times q^{n-1} = \dfrac{14}{95} \times 0,05^{n-1}$ puis $p_n = \dfrac{1}{19} + u_n = \dfrac{1}{19} + \dfrac{14}{95} \times 0,05^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_n = \frac{1}{19} + \frac{14}{95} \times 0,05^{n-1}.}$$

**c)** Puisque $|0,05| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,05^{n-1} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{19}.}$$

## EXERCICE 4

### 1) Restitution organisée de connaissances.

**a)** La fonction $g$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x \in [0,+\infty[$, $g'(x) = e^x - x$. Pour tout réel $x$, on a $e^x > x$ et donc la fonction $g'$ est positive sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction $g$ est croissante sur $[0,+\infty[$ et admet donc un minimum en $0$ égal à $g(0)$ ou encore $1$. Puisque $1$ est positif, on en déduit finalement que la fonction $g$ est positive sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,+\infty[,\ g(x) \geq 0.}$$

**b)** Soit $x > 0$. Puisque $g(x) \geq 0$, on a $e^x \geq \dfrac{x^2}{2}$ puis $\dfrac{e^x}{x} \geq \dfrac{x}{2}$. Maintenant, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.}$$

### 2)

**a)** Soit $x \geq 0$. On a $\dfrac{1}{4}x \geq 0$ et $e^{-\frac{x}{2}} \geq 0$. Par suite, $\dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} \geq 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est positive sur } [0,+\infty[.}$$

**b)** Pour $x \geq 0$, on a $f(x) = -\dfrac{1}{2}(-\dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}})$ et donc d'après un théorème de croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}(-\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \lim_{X\to-\infty} -\frac{1}{2}Xe^X = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $C$ en $+\infty$.

**c)** La fonction $f$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geq 0$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{4}(1 \times e^{-\frac{x}{2}} + x \times (-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \frac{1}{4}(1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}(2-x)e^{-\frac{x}{2}}.$$

Pour tout réel positif $x$ on a $\dfrac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}} > 0$. Par suite, pour $x \geq 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.

Comme $f(2) = \dfrac{1}{4} \times 2e^{-1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{2e}$, on en déduit le tableau de variations de la fonction $f$

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2e}$ | $\searrow$ | $0$ |

### 3)

**a)** Le fonction $f$ est continue sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction $F$ est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$ et de plus $F' = f$. D'après la question 2)a), la fonction $f$ est positive sur $[0,+\infty[$ et même, plus précisément, $f$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[.}$$

**b)** Pour $x \geq 0$, posons $F_1(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$. $F_1$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geq 0$,

$$F_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - (\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} = f(x).$$

Par suite, la fonction $F_1$ est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Mais alors, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = [F_1(t)]_0^x = F_1(x) - F_1(0) = F_1(x) - (1 - e^0) = F_1(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}.$$

Pour tout réel $x$ de $[0, +\infty[$, $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

**c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$. Donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

**d)** $F$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel $k$ de l'intervalle $[F(0), \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)[$ c'est-à-dire l'intervalle $[0, 1[$, l'équation $F(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, +\infty[$. En particulier, l'équation $F(x) = 0,5$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, +\infty[$, solution que l'on note $\alpha$.

La machine fournit $F(3,35) = 0,49\ldots$ et $F(3,36) = 0,50\ldots$. Comme $F(\alpha) = 0,5$, on a donc $F(3,35) < F\alpha) < F(3,36)$. Comme $F$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $3,35 < \alpha < 3,36$. Finalement

$\alpha = 3,36$ à $10^{-2}$ près par excès.

**4)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Puisque la fonction $f$ est positive sur $[0, n]$, on a

$$A_n = \int_0^n f(t)\ dt = F(n).$$

Puisque la fonction $F$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$,

- si $n \leq 3$, $F(n) \leq F(3) < F(3,35) < F(\alpha) = 0,5$
- si $n \geq 4$, $F(n) \geq F(4) \geq F(3,36) \geq F(\alpha) = 0,5$.

Donc

le plus petit entier $n$ tel que $A_n \geq 0,5$ est 4.