BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère le plan P d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3, 2, 6)$, B de coordonnées $(1, 2, 4)$ et C de coordonnées $(4, -2, 5)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. Vérifier que ce plan est le plan P.

2. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P.

c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.

d. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}.$$

a. Vérifier que ce système admet un barycentre, que l'on notera G.

b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

c. Déterminer la distance de G au plan P.

4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5.$$

Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

- $R(\Omega) = \Omega$
- pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi]$.

On rappelle que, pour des points A et B, d'affixes respectives a et b, $AB = |b - a|$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b - a)\ [2\pi]$.

Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_I = 1 + i$ et $z_B = 2 + 2i$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R.

b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_A de A.

c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right)$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A' = T(A)$.

a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A'.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?

c. Montrer que $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Etudier le signe de sa dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$.

a. Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = (\ln(x+3))^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$.
Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$.
Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 4 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est $0,1$. L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante. On considère les événements :
A : « au moins une personne accepte de répondre »
B : « moins de trois personnes acceptent de répondre »
C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

Calculer les probabilités des événements A, B, et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1,\ P(X=k) = \dfrac{e^{-a}a^k}{k!},\\ \text{et } P(X=n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{e^{-a}a^k}{k!},\\ \text{formules dans lesquelles } a = \dfrac{n}{10}.\end{array}\right.$$

a. Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

b. Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à $0,95$.

a. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1 - e^{-x}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$, et que cette solution est comprise entre $6,29$ et $6,3$.

c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.