BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Pondichéry

EXERCICE 1

1) a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2, 0, -2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(1, -4, -1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Ainsi, les points A, B et C définissent bien un plan.

b. $2x_A + y_A - 2z_A + 4 = 6 + 2 - 12 + 4 = 0$, $2x_B + y_B - 2z_B + 4 = 2 + 2 - 8 + 4 = 0$ et $2x_C + y_C - 2z_C + 4 = 8 - 2 - 10 + 4 = 0$. Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation du plan P et donc les points A, B et C appartiennent à ce plan. Ainsi

$$\boxed{\text{le plan (ABC) est le plan P.}}$$

2) a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-2) \times 1 + 0 \times (-4) + (-2) \times (-1) = -2 + 2 = 0$. Donc

$$\boxed{\text{le triangle ABC est rectangle en A.}}$$

b. Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2, 1, -2)$. Δ est la droite passant par $O(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(2, 1, -2)$. Donc

$$\boxed{\Delta \text{ est la droite dont un système d'équations paramétriques est } \left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

c. Le point K est le point d'intersection de la droite Δ et du plan P. Soient t un réel puis M le point de Δ de coordonnées $(2t, t, -2t)$.

$$M \in P \Leftrightarrow 2 \times 2t + 1 \times t - 2 \times (-2t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 9t + 4 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{9},$$

ce qui fournit les coordonnées de K : $\left(-\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

$$\boxed{\text{Le point K a pour coordonnées } \left(-\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right).}$$

On peut alors calculer la distance OK :

$$OK = \sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{64 + 16 + 64}}{9} = \frac{\sqrt{144}}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{OK = \frac{4}{3}.}$$

d. La distance de O au plan ABC est $h = \dfrac{4}{3}$. D'autre part, d'après la question 2)a., le triangle ABC est rectangle en A. L'aire $\mathscr{A}$ de ce triangle est donc égale à $\dfrac{AB \times AC}{2}$. Maintenant

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et } AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

et donc

$$\mathscr{A} = \frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 6.$$

Finalement, si on note $\mathscr{V}$ le volume du tétraèdre $OABC$,

$$\mathscr{V} = \frac{\mathscr{A} \times h}{3} = \frac{6 \times \frac{4}{3}}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$\boxed{\mathscr{V} = \frac{8}{3}.}$$

3) a. Puisque $3 + 1 + 1 + 1 = 6 \neq 0$, G est bien défini.

b. D'après le théorème du barycentre partiel, on a

$$G = \text{bar}\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\} = \text{bar}\{(O,3),(I,1+1+1)\} = \text{bar}\{(O,3),(I,3)\} = \text{bar}\{(O,1),(I,1)\}.$$

On en déduit que le point G est le milieu du segment $[OI]$ en en particulier que

$$\boxed{\text{le point } G \text{ appartient à la droite } (OI).}$$

c. Les coordonnées de G sont $\left(\dfrac{3x_O + x_A + x_B + x_C}{6}, \dfrac{3y_O + y_A + y_B + y_C}{6}, \dfrac{3z_O + z_A + z_B + z_C}{6}\right)$ ou encore $\left(\dfrac{8}{6}, \dfrac{2}{6}, \dfrac{15}{6}\right)$ ou enfin $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{2}\right)$. Puisqu'une équation du plan P est $2x + y - 2z + 4 = 0$, la distance d du point G au plan P est

$$d = \frac{\left|2 \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - 2 \times \frac{5}{2} + 4\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

4) Soit M un point de l'espace. On sait que

$$3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (3+1+1+1)\overrightarrow{MG} = 6\overrightarrow{MG},$$

et donc

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5 \Leftrightarrow \|6\overrightarrow{MG}\| = 5 \Leftrightarrow 6MG = 5 \Leftrightarrow MG = \frac{5}{6}.$$

$$\boxed{\Gamma \text{ est la sphère de centre } G \text{ et de rayon } R = \frac{5}{6}.}$$

La distance du centre G de Γ au plan P est $d = \dfrac{2}{3}$ et le rayon de la sphère Γ est $R = \dfrac{5}{6}$. Puisque $d < R$,

$$\boxed{\text{l'ensemble des points communs à } P \text{ et } \Gamma \text{ est un cercle.}}$$

EXERCICE 2

1) • Si $M = \Omega$ alors $z = \omega$, puis $M' = \Omega$ et $z' = \omega$. Dans ce cas on a bien $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

• Si $M \neq \Omega$, alors $M' \neq \Omega$ et M' est le point du plan tel que $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi]$. Mais alors $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et

$$\arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \arg(z'-\omega) - \arg(z-\omega) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi].$$

Ainsi, $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ c'est-à-dire le nombre $e^{i\theta}$. On a ainsi montré que $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$ ou encore que

$$\boxed{z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).}$$

2) **a.** L'expression complexe de R est

$$\begin{aligned} z' &= e^{i\pi/3}(z - z_B) + z_B = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(z - (2 + 2i)) + 2 + 2i = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z - (1 + i\sqrt{3})(1 + i) + 2 + 2i \\ &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z + (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'expression complexe de } R \text{ est } z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z + 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i.}$$

b. On a

$$z_A = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(1 + i) + 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i = \frac{1 - \sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{z_A = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{2}.}$$

c. Puisque $\dfrac{z_O + z_B}{2} = \dfrac{1}{2}z_B = 1 + i = z_I$, I est le milieu du segment $[OB]$. Donc $IB = IO$. D'autre part, $BI = BA$ et $\widehat{IBA} = \dfrac{\pi}{3}$. Par suite, le triangle ABI est équilatéral. On en déduit que $IA = IB$. Finalement,

$$IA = IB = OI = |z_I| = \sqrt{2},$$

et donc

les points O, A et B sont sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

Puisque I est le milieu du segment $[OB]$, $\mathscr{C}$ est aussi le cercle de diamètre $[OB]$. Puisque le point A est sur $\mathscr{C}$

$$\boxed{\text{le triangle } OAB \text{ est rectangle en } A.}$$

Le triangle OAB est rectangle en A et $\widehat{OBA} = \dfrac{\pi}{3}$. Donc $\widehat{BOA} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$. De plus, A est en dessous de la droite (OB) (puisque la droite (OB) a pour équation $y = x$ et que $y_A < x_A$). Par suite, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ admet une mesure dans $[0, \pi]$. On en déduit que

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi].}$$

d. Il est clair que $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ ou encore $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$. Mais alors

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}\right) - \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi].$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{12}\ [2\pi].}$$

3) **a.** L'expression complexe de T est $z' = z + z_{\overrightarrow{IO}} = z - z_I = z - (1+i)$. Donc

$$z'_A = z_A - (1+i) = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{3-\sqrt{3}}{2} - (1+i) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{z'_A = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}.}$$

b. Puisque $T(A) = A'$, on a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{IO}$. Donc le quadrilatère $OIAA'$ est un parallélogramme. De plus $IA = IO = \sqrt{2}$ et donc

$$\boxed{\text{le quadrilatère } OIAA' \text{ est un losange.}}$$

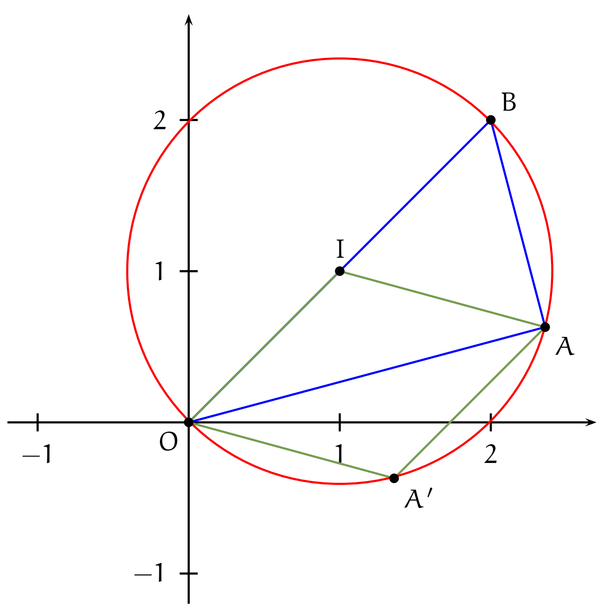
c. Le quadrilatère $OIAA'$ est un losange. Donc la droite (OA) est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OI})$. D'après la question 2.b., on a donc

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}) &= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \text{ (car } \overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{OB} \text{ sont colinéaires et de même sens)}\\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Mais alors, d'après la question 2.d.,

$$\arg(z_{A'}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}\ [2\pi].$$

$$\boxed{\arg(z_{A'}) = -\frac{\pi}{12}\ [2\pi].}$$



EXERCICE 3

1) • **Dérivabilité et dérivée de f.**

Pour tout réel x de $[0,+\infty[$, on a $x+3>0$ et donc la fonction $x \mapsto \ln(x+3)$ est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$. De plus, pour $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+3} \times (x+3) - \ln(x+3) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ f'(x) = \frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}.}$$

• **Etude du signe de f'.** Pour tout réel positif x, on a $(x+3)^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x+3)$. Maintenant si x est un réel positif, alors $x+3 \geq 3 > e$ puis $\ln(x+3) > \ln e = 1$ (car la fonction $t \mapsto \ln t$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[)$ et finalement $1-\ln(x+3) < 0$.

Ainsi, la fonction f' est strictement négative sur $[0,+\infty[$.

• **Limite de f en $+\infty$.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+3} = 0.}$$

• **Tableau de variations de f.**

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$\frac{\ln 3}{3}$ $\searrow$	0

2) a. Soit n un entier naturel. Puisque f est décroissante sur $[0,+\infty[$, si x est un réel de $[0,+\infty[$ tel que $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b. Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[n,n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx.$$

Or, $\int_n^{n+1} f(n)\,dx = (n+1-n) \times f(n) = f(n)$ et de même $\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = (n+1-n) \times f(n+1) = f(n+1)$. On a donc montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ f(n+1) \leq u_n \leq f(n).}$$

c. On a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n+1) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite (u_n) est convergente et que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

3) a. On a vu que la fonction $x \mapsto \ln(x+3)$ est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. De plus pour $x \geq 0$,

$$F'(x) = 2 \times \frac{1}{x+3} \times \ln(x+3) = 2f(x).$$

b. Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ est $\frac{1}{2}F$. Par suite

$$I_n = \int_0^n f(x)\ dx = \left[\frac{1}{2}F(x)\right]_0^n = \frac{1}{2}\left((\ln(n+3))^2 - (\ln 3)^2\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ I_n = \frac{1}{2}\left((\ln(n+3))^2 - (\ln 3)^2\right).}$$

4) Soit n un entier naturel non nul. D'après la relation de Chasles

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^2 f(x)\ dx + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)\ dx = \int_0^n f(x)\ dx = I_n = \frac{1}{2}\left((\ln(n+3))^2 - (\ln 3)^2\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ S_n = \frac{1}{2}\left((\ln(n+3))^2 - (\ln 3)^2\right).}$$

Mais alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ et en particulier

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est divergente.}}$$

EXERCICE 4

1) Notons Y le nombre de personnes qui acceptent de répondre. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 50 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne accepte de répondre » avec une probabilité $p = 0,1$ ou « la personne n'accepte pas de répondre » avec une probabilité $1 - p = 0,9$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$. On a alors

$$p(A) = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (0,9)^{50} = 0,995 \text{ arrondi au millième.}$$

puis

$$\begin{aligned} p(B) &= p(Y < 3) = p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) \\ &= (0,9)^{50} + \binom{50}{1} \times 0,1 \times (0,9)^{49} + \binom{50}{2} \times (0,1)^2 \times (0,9)^{48} \\ &= (0,9)^{50} + 50 \times 0,1 \times (0,9)^{49} + 1225 \times (0,1)^2 \times (0,9)^{48} \\ &= 0,112 \text{ arrondi au millième} \end{aligned}$$

et

$$p(C) = p(Y \geq 3) = 1 - p(Y < 3) = 0,888 \text{ arrondi au millième.}$$

$$\boxed{p(A) = 0,995 \text{ arrondi au millième, } p(B) = 0,112 \text{ arrondi au millième et } p(C) = 0,888 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) a. La probabilité qu'au moins trois personnes interrogées répondent est

$$p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)) = 1 - \left(e^{-a} + ae^{-a} + \frac{e^{-a}a^2}{2}\right) = 1 - e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

b. On note que si $a = 5$, alors $n = 10 \times a = 50$. Ensuite

$$f(5) = 1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{25}{2}\right) = 1 - \frac{37e^{-5}}{2} = 0,875 \text{ arrondi au millième.}$$

Ce résultat n'est pas très proche de celui obtenu à la question 1.

3) a. • **Dérivabilité et dérivée de f.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $x \geq 0$ on a

$$f'(x) = -\left(-e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + e^{-x}(1 + x)\right) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x\right) = \frac{e^{-x}x^2}{2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ f'(x) = \frac{e^{-x}x^2}{2}.}$$

La fonction f' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

• **Limite de f en $+\infty$.** Pour tout réel positif x, on a

$$f(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}.$$

Mais d'une part $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et d'autre part, d'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x/x^2} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.}$$

• **Tableau de variations de f.**

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $+$	
f	$0 \nearrow$	1

$f(0) = 1 - e^0(1 + 0 + 0) = 0$

b. L'application f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Comme $f(0) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, on sait que pour tout réel k de l'intervalle $[0, 1[$, l'équation $f(x) = k$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[0, +\infty[$. En particulier

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0,95 \text{ admet une solution unique sur } \mathbb{R}^+.}$$

Notons α cette solution. On a $f(6, 29) = 0, 94\ldots < 0, 95$ et $f(6, 3) = 0, 9501\ldots > 0, 95$. Ainsi, $f(6, 29) < f(\alpha) < f(6, 3)$ et puisque f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$,

$$\boxed{6, 29 < \alpha < 6, 3.}$$

c. Soient n un entier naturel puis $a = \dfrac{n}{10}$.

$$f(a) > 0, 95 \Leftrightarrow f(a) > f(\alpha) \Leftrightarrow a > \alpha \Leftrightarrow 10a > 10\alpha \Leftrightarrow n > 10\alpha.$$

Comme n est un entier et que $62, 9 < 10\alpha < 63$, $n > 10\alpha \Leftrightarrow n \geq 63$.

$$\boxed{\text{Le nombre minimum de personnes à interroger est } n = 63.}$$

