BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2007

MATHEMATIQUES

- Série S -

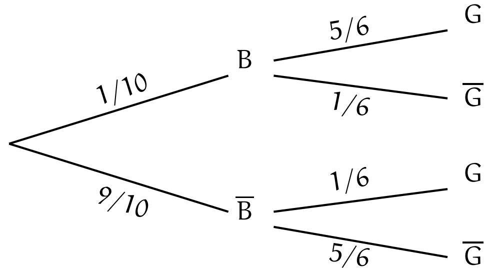
Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

Partie A

1. Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales

$$p(G) = p(G \cap B) + p(G \cap \overline{B}) = p(B) \times p_B(G) + p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(G) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

$$\boxed{p(G) = \frac{7}{30}.}$$

2. La probabilité demandée est $p_{\overline{G}}(B)$. Or

$$p_{\overline{G}}(B) = \frac{p(B \cap \overline{G})}{p(\overline{G})} = \frac{p(B) \times p_B(\overline{G})}{1 - p(G)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{7}{30}} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} \times \frac{30}{23} = \frac{1}{46}.$$

$$\boxed{p_{\overline{G}}(B) = \frac{1}{46}.}$$

3. Notons X le nombre de gains. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le joueur gagne » avec une probabilité $p = \frac{7}{30}$ (d'après 1.) ou « le joueur perd » avec une probabilité $1 - p = \frac{23}{30}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{7}{30}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{7}{30}\right)^2 \left(\frac{23}{30}\right)^2 = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{7^2 \times 23^2}{30^4} = \frac{6 \times 7^2 \times 23^2}{30^4} = \frac{25921}{135000} = 0,192 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

La probabilité que le joueur gagne exactement deux parties est égale à $0,192$ à 10^{-3} près.

4. Soit n le nombre de parties jouées. L'événement « le joueur gagne au moins une partie en n tentatives » est le contraire de l'événement « le joueur ne gagne aucune partie en n tentatives ». A chaque partie, la probabilité que le joueur perde est $\dfrac{23}{30}$. La probabilité que le joueur perde toutes les parties est donc $\left(\dfrac{23}{30}\right)^n$ et finalement la probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $1-\left(\dfrac{23}{30}\right)^n$. Maintenant

$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0,99 &\Leftrightarrow \left(\frac{23}{30}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{23}{30}\right)^n \leq \frac{1}{100}\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{30}{23}\right)^n \geq 100 \text{ (par décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{30}{23}\right)^n\right) \geq \ln 100 \text{ (par croissance de la fonction } x \mapsto \ln x \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{30}{23}\right) \geq \ln(100) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{30}{23}\right)} \text{ (car } \ln\left(\frac{30}{23}\right) > 0)\\
&\Leftrightarrow n \geq 17,3\ldots\\
&\Leftrightarrow n \geq 18.
\end{aligned}$$

Le nombre minimal de parties à jouer pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$ est 18.

Partie B

1. a) La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	4	-1
$p(X = x_i)$	$\dfrac{7}{30}$	$\dfrac{23}{30}$

L'espérance de X est :

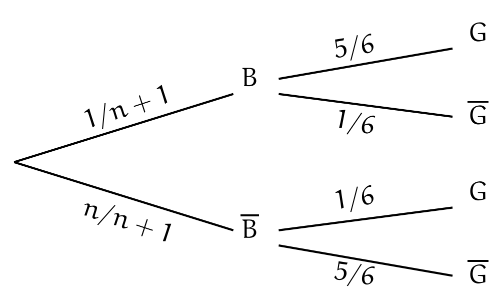
$$E(X) = 4 \times \frac{7}{30} + (-1) \times \frac{23}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{6}.}$$

b) Puisque $E(X) > 0$,

le jeu est défavorable à l'organisateur.

2. Représentons de nouveau la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales

$$p(G) = p(G \cap B) + p(G \cap \overline{B}) = p(B) \times p_B(G) + p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(G) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{n+5}{6(n+1)}.$$

Puisque $1 - \dfrac{n+5}{6(n+1)} = \dfrac{(6n+6)-(n+5)}{6(n+1)} = \dfrac{5n+1}{6(n+1)}$, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est alors :

x_i	4	-1
$p(X = x_i)$	$\dfrac{n+5}{6(n+1)}$	$\dfrac{5n+1}{6(n+1)}$

L'espérance de X est :

$$E(X) = 4 \times \frac{n+5}{6(n+1)} + (-1) \times \frac{5n+1}{6(n+1)} = \frac{4(n+5)-(5n+1)}{6(n+1)} = \frac{-n+19}{6(n+1)}.$$

Par suite,

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow \frac{-n+19}{6(n+1)} > 0 \Leftrightarrow -n+19 > 0 \Leftrightarrow n < 19 \Leftrightarrow n \leq 18.$$

Jusqu'à 18 jetons noirs, le jeu est défavorable à l'organisateur.

EXERCICE 2

1. Soit z un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont notées respectivement x et y.

$$\begin{aligned}\overline{z}-3iz-3+6i=0 &\Leftrightarrow (x-iy)-3i(x+iy)-3+6i=0 \Leftrightarrow x-iy-3ix+3y-3+6i=0\\ &\Leftrightarrow (x+3y-3)+i(-3x-y+6)=0\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3y-3=0\\ -3x-y+6=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-3x+6\\ x+3(-3x+6)-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-3x+6\\ -8x+15=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{15}{8}\\ y=-3\times\dfrac{15}{8}+6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{15}{8}\\ y=\dfrac{3}{8}\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation proposée est } \left\{\frac{15+3i}{8}\right\}.}$$

2. Notons r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. L'expression complexe de r est $z'=e^{i\pi/3}z$ ou encore $z'=\dfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z$. On a alors

$$\begin{aligned}OAB \text{ équilatéral direct} &\Leftrightarrow OB=OA \text{ et } \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow B=r(A)\\ &\Leftrightarrow z_B=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z_A \Leftrightarrow z_B=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(4-2i) \Leftrightarrow z_B=(1+i\sqrt{3})(2-i)\\ &\Leftrightarrow z_B=(2+\sqrt{3})+i(2\sqrt{3}-1).\end{aligned}$$

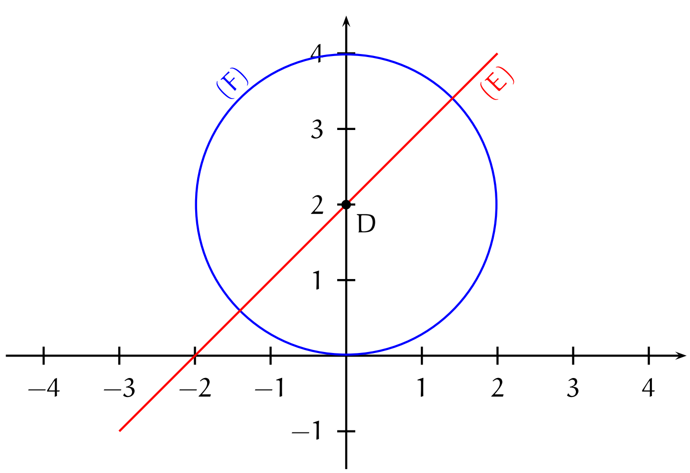
$$\boxed{z_B=(2+\sqrt{3})+i(2\sqrt{3}-1).}$$

3. **a)** et **b)** Soit M un point du plan distinct de D dont l'affixe est notée z.

$$\arg(z-2i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{DM}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi.$$

L'ensemble (E) est la droite passant par $D(0,2)$ d'angle polaire $\dfrac{\pi}{4}$ privée de D ou encore la droite passant par D et de coefficient directeur 1, privée de D. (E) est donc la droite d'équation cartésienne $y=x+2$ privée du point de coordonnées $(0,2)$.

On sait d'autre part que (F) est le cercle de centre D et de rayon 2.



4. Soit M un point du plan dont l'affixe z est un nombre complexe distinct de -2. Soient G et H les points d'affixes respectives 1 et -2. On note tout d'abord que $z \neq -2 \Leftrightarrow \overline{z} \neq \overline{-2} \Leftrightarrow \overline{z} \neq -2 \Leftrightarrow \overline{z}+2 \neq 0 \Leftrightarrow |\overline{z}+2| \neq 0$. Par suite

$$\begin{aligned}
|z'| = 1 &\Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{\overline{z}+2}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{|\overline{z}+2|} = 1 \\
&\Leftrightarrow |z-1| = |\overline{z}+2| \text{ et } |\overline{z}+2| \neq 0 \\
&\Leftrightarrow |z-1| = |\overline{z}+2| \text{ (car } -2 \text{ n'est pas solution de l'équation } |z-1| = |\overline{z}+2|) \\
&\Leftrightarrow |z-1| = |\overline{\overline{z}+2}| \Leftrightarrow |z-1| = |z+2| \Leftrightarrow |z - z_G| = |z - z_H| \\
&\Leftrightarrow GM = HM \Leftrightarrow M \in \text{med}[GH].
\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[GH]$ c'est-à-dire la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 3

1. a) $x_E = \dfrac{2x_A + x_B}{3} = \dfrac{2 \times \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3}}{3} = 0$, $y_E = \dfrac{2y_A + y_B}{3} = \dfrac{2 \times (-3) + 0}{3} = -2$ et $z_E = \dfrac{2z_A + z_B}{3} = \dfrac{2 \times 2 - 4}{3} = 0$.

$$\boxed{\text{Le point E a pour coordonnées } (0, -2, 0).}$$

b) Soit M un point de l'espace. On sait que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (2+1)\overrightarrow{ME} = 3\overrightarrow{ME}$ et donc

$$M \in (P) \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\| \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{ME}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\| \Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{ME}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\| \Leftrightarrow ME = MO.$$

Par suite,

$$\boxed{(P) \text{ est le plan médiateur du segment } [EO].}$$

c) Soit M un point de l'espace dont les coordonnées sont notées (x, y, z).

$$M \in (P) \Leftrightarrow EM = OM \Leftrightarrow EM^2 = OM^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = y^2 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{4} \Leftrightarrow y = -1.$$

$$\boxed{(P) \text{ est le plan d'équation } y = -1.}$$

2. a) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(-\frac{4}{3} - \frac{2}{3})^2 + (0+3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$ et donc le rayon R de la sphère (S) est $\dfrac{7}{2}$.

D'autre part, le point I a pour coordonnées $(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2})$ ou encore $(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{3}{2}, -1)$ et comme (P) est le plan d'équation $y + 1 = 0$ on a

$$d(I, (P)) = \frac{|0 \times (-\frac{1}{3}) + 1 \times (-\frac{3}{2}) + 0 \times (-1) + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Le rayon } R \text{ de la sphère } (S) \text{ est } \frac{7}{2} \text{ et la distance } d \text{ du point I au plan } (P) \text{ est } \frac{1}{2}.}$$

Comme $d = \dfrac{1}{2} < \dfrac{7}{2} = R$, on sait que l'intersection de (S) et de (P) est un cercle de rayon non nul et en particulier n'est pas vide.

b) Le plan (P) est parallèle au plan (xOz). On peut donc rapporter le plan (P) au repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ où Ω est le point de coordonnées $(0, -1, 0)$. Soit M un point de (P) dont les coordonnées sont notées $(x, -1, z)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et donc (x, z) dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$.

$$\begin{aligned}
M \in (C) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{2}{3})(x + \frac{4}{3}) + (-1+3)(-1-0) + (z-2)(z+4) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} - 2 + z^2 + 2z - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + z^2 + 2z - \frac{98}{9} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + (z+1)^2 - 1 - \frac{98}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 - \frac{99}{9} - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12.
\end{aligned}$$

$$\boxed{(C) \text{ est le cercle dont le centre a pour coordonnées } (-\frac{1}{3}, -1, -1) \text{ et pour rayon } \sqrt{12}.}$$

3. a) La droite (ID) est la droite passant par $\mathrm{I}(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{ID}}(0, 1, 4\sqrt{3})$. Une représentation paramétrique de la droite (ID) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{3}{2} + t \\ z = -1 + 4\sqrt{3}t \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}.$$

b) On rappelle que le cercle $(\mathcal{C})$ est contenu dans le plan (P) d'équation $y = -1$.
Soient t un réel puis M le point de la droite (ID) de coordonnées $(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2} + t, -1 + 4\sqrt{3}t)$. Le point M appartient au plan (P) si et seulement si $-\frac{3}{2} + t = -1$ ou encore $t = \frac{1}{2}$. La droite (ID) est donc sécante au plan (P) au point $F(-\frac{1}{3}, -1, -1 + 2\sqrt{3})$. Vérifions alors que F appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

$$\left(x_F + \frac{1}{3}\right)^2 + (z_F + 1)^2 = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 + 2\sqrt{3} + 1\right)^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12.$$

Ainsi, le point F appartient effectivement au cercle $(\mathcal{C})$ et donc

$$\boxed{\text{la droite (ID) coupe le cercle } (\mathcal{C}) \text{ au point } F(-\tfrac{1}{3}, -1, -1 + 2\sqrt{3}).}$$

EXERCICE 4

Partie A

1. a) Soit $x \in [1,2]$. Puisque $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$ puis $x \ln x \geq 0$ et finalement $f(x) \geq 0$.

$$\boxed{f \text{ est positive sur l'intervalle } [1,2].}$$

b) $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \dfrac{(1 + 2\ln 2) - (1 + 2\ln 1)}{2-1} = 2\ln 2.$

$$\boxed{\text{Le coefficient directeur de la droite } (MN) \text{ est } 2\ln 2.}$$

c) La fonction $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $[1,2]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[1,2]$ et il en est de même de f.
Soit $x \in [1,2]$. On note (T_x) la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x. On sait que le coefficient directeur de (T_x) est $f'(x)$ avec

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Par suite,

$$(T_x) \parallel (MN) \Leftrightarrow \ln x + 1 = 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln x = 2\ln 2 - 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln(2^2) - \ln(e) \Leftrightarrow \ln x = \ln\left(\frac{4}{e}\right) \Leftrightarrow x = \frac{4}{e}.$$

Comme de plus $\dfrac{4}{e} = 1,4\ldots \in [1,2]$, sur l'intervalle $[1,2]$, il existe un et un seul point en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite (MN) à savoir le point E de C_f d'abscisse $\dfrac{4}{e}$.

d) On a $x_E = \dfrac{4}{e}$ puis $f(x_E) = 1 + \dfrac{4}{e}\ln\left(\dfrac{4}{e}\right) = 1 + \dfrac{4}{e}(2\ln 2 - 1)$ et enfin par définition $f'(x_E) = 2\ln 2$. Une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point E est donc

$$y = f'(x_E)(x - x_E) + f(x_E) = 2\ln 2(x - \frac{4}{e}) + 1 + \frac{4}{e}(2\ln 2 - 1) = (2\ln 2)x - 2\ln 2 \times \frac{4}{e} + 1 + 2\ln 2 \times \frac{4}{e} - \frac{4}{e} = (2\ln 2)x + 1 - \frac{4}{e}.$$

$$\boxed{\text{Une équation de la tangente } T \text{ à la courbe } C_f \text{ au point d'abscisse } E \text{ est } y = (2\ln 2)x + 1 - \frac{4}{e}.}$$

2. a) g est dérivable sur l'intervalle $[1,2]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1,2]$ et pour $x \in [1,2]$

$$g'(x) = f'(x) - 2\ln 2 = 1 + \ln x - 2\ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1,2],\ g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right).}$$

b) Soit $x \in [1,2]$.

$$\begin{aligned} g'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) \geq -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{4} \geq e^{-1} \text{ (par croissance de la fonction } x \mapsto e^x \text{ sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x \geq 4e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

La fonction g' est donc positive sur l'intervalle $[\frac{4}{e}, 2]$ et négative sur l'intervalle $[1, \frac{4}{e}]$. On en déduit que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1, \frac{4}{e}]$ et croisante sur l'intervalle $[\frac{4}{e}, 2]$. La fonction g admet donc un minimum en $\frac{4}{e}$ égal à $f(x_E) - (f'(x_E)(x_E - x_E) + f(x_E))$ ou encore un minimum égal à 0.

Ainsi, pour tout réel x de $[1, 2]$, $f(x) \geq (2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1$ et donc

$$\boxed{C_f \text{ est au-dessus de } T \text{ sur l'intervalle } [1, 2].}$$

3. **a)** On rappelle que l'aire d'un trapèze rectangle est : $\dfrac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$. Ici, l'aire du trapèze $MNQP$ est égale à

$$\frac{(PM + QN) \times PQ}{2} = \frac{(1 + 1 + 2\ln 2) \times 1}{2} = 1 + \ln 2,$$

et l'aire du trapèze $M'N'QP$ est égale à

$$\frac{(PM' + QN') \times PQ}{2} = \frac{(2\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 + 4\ln 2 - \frac{4}{e} + 1) \times 1}{2} = 3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'aire du trapèze } MNQP \text{ est égale à } 1 + \ln 2 \text{ unités d'aire.}\\ \text{L'aire du trapèze } M'N'QP \text{ est égale à } 3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 \text{ unités d'aire.}\end{array}}$$

b) Sur l'intervalle $[1, 2]$, C_f est au-dessous de la droite (MN) et au-dessus de la droite T.
Donc aire$(M'N'QP) \leq \mathcal{A} \leq$ aire$(MNQP)$ ou encore

$$3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 \leq \mathcal{A} \leq 1 + \ln 2.$$

La machine fournit $1 + \ln 2 = 1,69\ldots$ et $3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 = 1,60\ldots$. On en déduit que

$$\boxed{1,6 < \mathcal{A} < 1,7.}$$

Partie B

1. Pour $x \in [1, 2]$, posons $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v(x) = \ln x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, 2]$ et pour tout réel x de $[1, 2]$, $u'(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1, 2]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

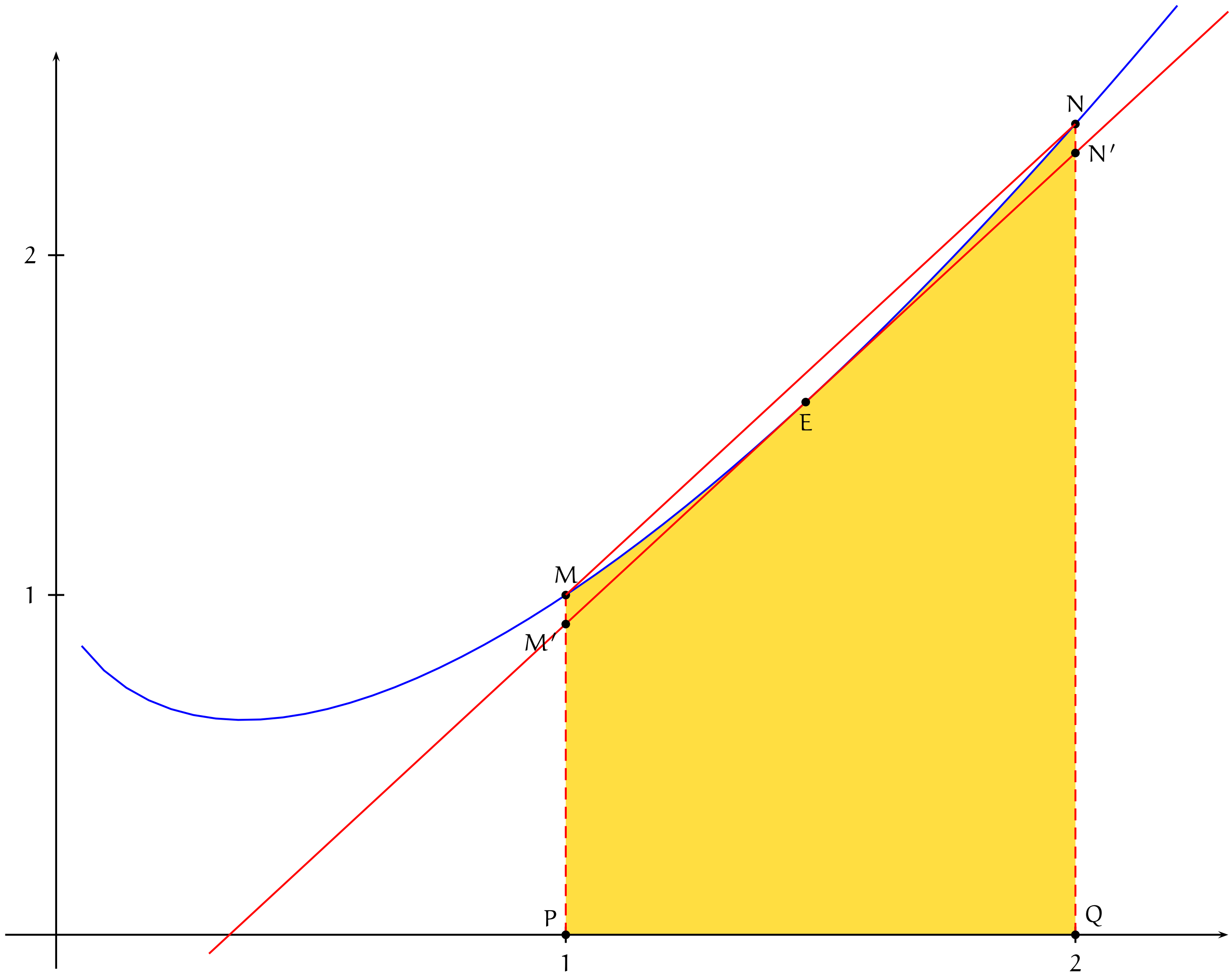
$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx\\ &= \frac{4\ln 2}{2} - \frac{\ln 1}{2} - \frac{1}{2}\int_1^2 x \, dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 x\ln x \, dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.}$$

2. Puisque la fonction f est continue et positive sur $[1, 2]$,

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (1 + x\ln x) \, dx = \int_1^2 dx + \int_1^2 x\ln x \, dx = 1 + 2\ln 2 - \frac{3}{4} = 2\ln 2 + \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 2\ln 2 + \frac{1}{4} = 1,63\ldots \text{ unités d'aire.}}$$


2
1
N
N′
E
M
M′
P
Q
1
2

