BACCALAUREAT GENERAL

Session 2007
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Alger

EXERCICE 1

1) a) **Réponse A**

1) b) **Réponse A**

2) a) **Réponse B**

2) b) **Réponse C**

3) a) **Réponse B**

3) b) **Réponse C**

3) c) **Réponse A**

3) d) **Réponse C**

Explications.

1) a) Le nombre de tirages simultanés de 3 boules parmi 8 est $\binom{8}{3}$ où

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56.$$

Parmi ces 56 tirages équiprobables, il y a $\binom{3}{3} = 1$ tirage où les trois boules sont noires. La probabilité demandée est donc $\frac{1}{56}$.

b) On sait déjà qu'il y a 1 tirage où les trois boules sont noires. D'autre part, il y a $\binom{5}{3}$ tirages où les trois boules sont rouges avec

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10.$$

La probabilité demandée est donc $\frac{10+1}{56}$ ou encore $\frac{11}{56}$.

2) Notons X le nombre de boules noires obtenues. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule obtenue est noire » avec une probabilité $p = \frac{3}{8}$ ou « la boule obtenue n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{8}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{3}{8}$.

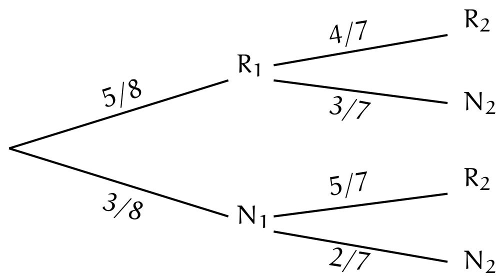
a) La probabilité demandée est $p(X = 5)$ et on a

$$p(X = 5) = \binom{5}{5} \times \left(\frac{3}{8}\right)^5 \times \left(\frac{5}{8}\right)^0 = \left(\frac{3}{8}\right)^5.$$

b) La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 = 10 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3.$$

3) Représentons la situation par un arbre. On a directement $p(R_1) = \dfrac{5}{8}$ et $p(R_2) = \dfrac{3}{8}$.



a) Ensuite, si on obtient une boule rouge au premier tirage, il reste 7 boules dans l'urne, 4 d'entre elles étant rouges et 3 d'entre elles étant noires. Donc

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}.$$

b) $p(R_1 \cap N_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(N_2) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{15}{56}$.

c) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(R_2) = p(R_1 \cap R_2) + p(N_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}.$$

d)

$$p_{N_2}(R_1) = \frac{p(R_1 \cap N_2)}{p(N_2)} = \frac{p(R_1) \times p_{R_1}(N_2)}{1 - p(R_2)} = \frac{\dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7}}{\dfrac{3}{8}} = \frac{5}{7}.$$

EXERCICE 2

I) Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. Notons x la partie réelle de z et y sa partie imaginaire de sorte que $z = x + iy$.

1)

$$\overline{z} = -z \Leftrightarrow x - iy = -x - iy \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z \text{ imaginaire pur.}$$

$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ z \text{ est imaginaire pur si et seulement si } \overline{z} = -z.}$

2) De même

$$\overline{z} = z \Leftrightarrow x - iy = x + iy \Leftrightarrow 2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \text{ réel.}$$

$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ z \text{ est réel si et seulement si } \overline{z} = z.}$

3)

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

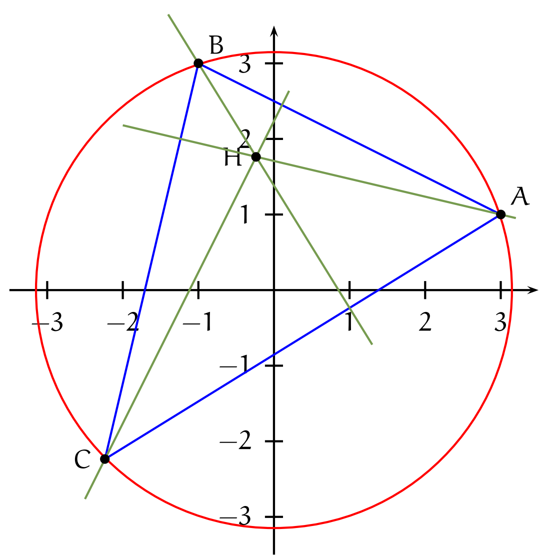
$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ z\overline{z} = |z|^2.}$

II) Etude d'un cas particulier.

1) $OA = |a| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $OB = |b| = |-1 + 3i| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ et $OC = |c| = |-\sqrt{5} - i\sqrt{5}| = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{10}$. Donc, $OA = OB = OC = \sqrt{10}$ ce qui montre que

$\boxed{O \text{ est le centre du cercle circonscrit au triangle } ABC.}$

2) $a + b + c = 3 + i - 1 + 3i - \sqrt{5} - i\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5}) + (4 - \sqrt{5})i$. Donc H est le point de coordonnées $(2 - \sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})$.



Sur le graphique ci-dessus, il semble que le point H d'affixe $a + b + c$ est l'orthocentre du triangle ABC.

III) Etude du cas général.

1)

$$\text{O centre du cercle circonscrit au triangle ABC} \Leftrightarrow OA = OB = OC$$
$$\Leftrightarrow |a| = |b| = |c| \Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2 = |c|^2 \Leftrightarrow a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$

2) a)

$$\overline{w} = \overline{\overline{b}c - b\overline{c}} = \overline{\overline{b}}\overline{c} - \overline{b}\overline{\overline{c}} = b\overline{c} - \overline{b}c = -(\overline{b}c - b\overline{c}) = -w.$$

Mais alors, la question I)1) permet d'affirmer que

$$\boxed{w \text{ est imaginaire pur.}}$$

b) D'après la question III)1), $b\overline{b} = c\overline{c}$ et donc

$$(b+c)(\overline{b} - \overline{c}) = b\overline{b} - c\overline{c} + \overline{b}c - b\overline{c} = 0 + w = w,$$

et donc

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)\overline{(b-c)}}{(b-c)\overline{(b-c)}} = \frac{(b+c)(\overline{b}-\overline{c})}{|b-c|^2} = \frac{w}{|b-c|^2}.$$

$$\boxed{\frac{b+c}{b-c} = \frac{w}{|b-c|^2}.}$$

c) $\dfrac{1}{|b-c|^2}$ est un réel et w est un imaginaire pur. Donc $\dfrac{w}{|b-c|^2}$ est un imaginaire pur et finalement

$$\boxed{\frac{b+c}{b-c} \text{ est un imaginaire pur.}}$$

3) a) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{CB}$ est $b - c$ et d'autre part

$$z_{\overrightarrow{AH}} = z_H - z_A = (a+b+c) - a = b + c.$$

$$\boxed{z_{\overrightarrow{AH}} = b + c \text{ et } z_{\overrightarrow{CB}} = b - c.}$$

b) (Omission de l'énoncé : dans cette question il faut supposer de plus que $b \neq -c$ (ou encore que O n'est pas le milieu du segment [BC])). Dans ce cas, $\dfrac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur non nul et on sait que $\arg\left(\dfrac{b+c}{b-c}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais alors

$$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right) = \arg\left(\frac{b+c}{b-c}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\text{Si } b \neq -c,\ \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

c) • Si $b \neq -c$, les résultats de la question précédente montrent que H est sur la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A ou encore la hauteur issue de A du triangle ABC et aussi sur la hauteur issue de B du triangle ABC. H est donc sur deux des trois hauteurs du triangle ABC ou encore H est l'orthocentre du triangle ABC.

• Si $b = -c$, le point O est le milieu du segment $[BC]$. Le segment $[BC]$ est donc un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC. On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A et donc que l'orthocentre du triangle ABC est le point A. Or l'affixe du point H est $a + (b + c)$ c'est-à-dire a et donc $H = A$. Dans ce cas aussi, H est l'orthocentre du triangle ABC.

Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{le point } H \text{ d'affixe } a + b + c \text{ est l'orthocentre du triangle } ABC.}$$

EXERCICE 3

Imprécisions de l'énoncé :

• la condition « f ne s'annule pas sur I » ne sert à rien et est même gênante dans la partie III. On ne tiendra donc pas compte de cette condition.

• la condition « f' ne s'annule pas sur I » ne sert qu'en I)1) et en II). On ne tiendra pas compte de cette condition dans les autres questions.

I) Question préliminaire

1) Soient $x \in I$ et $X \in \mathbb{R}$. Soit H le point de l'axe des abscisses d'abscisse X. Puisque $f'(x) \neq 0$, on a

$$H \in T \Leftrightarrow f'(x)(X-x)+f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)(X-x)=-f(x) \Leftrightarrow X-x=-\frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow X=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de I, } X_T = x-\frac{f(x)}{f'(x)}.}$$

2) Soient $x \in I$ et $Y \in \mathbb{R}$. Soit K le point de l'axe des ordonnées d'ordonnée Y.

$$K \in T \Leftrightarrow Y=f'(x)(0-x)+f(x) \Leftrightarrow Y=f(x)-xf'(x).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de I, } Y_T = f(x)-xf'(x).}$$

II)

1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que f' ne s'annule pas sur I. Pour tout réel x de l'intervalle I, on a

$$x-X_T = x-\left(x-\frac{f'(x)}{f(x)}\right)=\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Si f vérifie la propriété 1, alors pour tout réel x de I, $\dfrac{f(x)}{f'(x)}=k$ ou encore $f'(x)=\dfrac{1}{k}f(x)$. Par suite, f est solution de l'équation différentielle $y'=\dfrac{1}{k}y$.

Réciproquement, si f est une solution de l'équation différentielle $y'=\dfrac{1}{k}y$, on sait qu'il existe un réel C tel que pour tout réel x de I, $f(x)=Ce^{x/k}$. Par suite, ou bien f est la fonction nulle (cas où $C=0$), ou bien f est une fonction telle que f' ne s'annule pas (cas où $C\neq 0$). Dans ce dernier cas, pour tout réel x de I, on a $f'(x)=\dfrac{1}{k}f(x)$ puis $\dfrac{f(x)}{f'(x)}=k$ et donc $x-X_T=k$.

Finalement, si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que f' ne s'annule pas sur I, f vérifie la propriété 1 si et seulement si f est une solution non nulle de l'équation différentielle $y'=\dfrac{1}{k}y$.

2) D'après la question précédente, les fonctions vérifiant la propriété 1 sont les fonctions de la forme $x\mapsto Ce^{x/k}$, $C\neq 0$.

Maintenant, si $k=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{k}=2$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=2y$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto Ce^{2x}$, $C\in\mathbb{R}$. Soit alors $C\in\mathbb{R}$ et f la fonction $x\mapsto Ce^{2x}$.

$$f(0)=1 \Leftrightarrow Ce^0=1 \Leftrightarrow C=1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \ f(x)=e^{2x}.}$$

III)

1) Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$, on a

$$y-Y_T=f(x)-(f(x)-xf'(x))=xf'(x).$$

f vérifie la propriété 2 $\Leftrightarrow$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $xf'(x) = k \Leftrightarrow$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{k}{x} \Leftrightarrow f$ est solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{k}{x}$.

2) Les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \dfrac{k}{x}$, c'est-à-dire les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ sur $]0,+\infty[$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto k\ln x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Quand $k = \dfrac{1}{2}$, on obtient les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Soit alors $C \in \mathbb{R}$ et f la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln x + C$.

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{1}{2}\ln x.}$$

EXERCICE 4

I) Existence et unicité de la solution

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \text{ solution de l'équation } (E) &\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = x \text{ et } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = x \text{ (car } \frac{1}{e^0} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, x \text{ est solution de l'équation } (E) \text{ si et seulement si } f(x) = 0.}$$

2) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f'(x) = 1 + e^{-x}.$$

Pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$ et donc $f'(x) > 0$. Par suite

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

b • $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} -e^X = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

• Ainsi, la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ que l'on note α.

c) On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-1/2} = -0,1\ldots < 0$ et $f(1) = 1 - e^{-1} = 0,6\ldots > 0$. Puisque $f(\alpha) = 0$, on a donc $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(\alpha) \leq f(1)$ et donc, puisque f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

$$\boxed{\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].}$$

d) Soit $x \in [0, \alpha]$. Puisque f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) \leq f(\alpha)$ ou encore $f(x) \leq 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est négative sur } [0, \alpha].}$$

II) Deuxème approche

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1+x}{1+e^x} = x \\ &\Leftrightarrow 1 + x = x(1 + e^x) \text{ (car } 1 + e^x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow 1 + x = x + xe^x \Leftrightarrow xe^x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x.}$$

2) L'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ à savoir α et donc l'équation $g(x) = x$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ à savoir α.

3) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$g'(x) = \frac{1(1+e^x) - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}.$$

Puisque pour tout réel x, on a $(1+e^x)^2 > 0$, $g'(x)$ est pour tout réel x du signe de $1-xe^x$. Maintenant, d'après la question I)2)d), la fonction f est négative sur $[0, \alpha]$. Soit alors x un réel de $[0, \alpha]$.

$$\begin{aligned} f(x) \leq 0 \Rightarrow x - e^{-x} \leq 0 \Rightarrow x \leq e^{-x} \Rightarrow x \leq \frac{1}{e^x} \\ &\Rightarrow xe^x \leq 1 \text{ (car } e^x > 0) \\ &\Rightarrow 1 - xe^x \geq 0. \end{aligned}$$

Finalement, la fonction g' est positive sur $[0, \alpha]$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est croissante sur } [0, \alpha].}$$

III) Construction d'une suite dé réels ayant pour limite α

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

- Déjà $u_0 = 0$, puis $u_1 = \dfrac{1+0}{1+e^0} = \dfrac{1}{2}$. Or, d'après la question I)2)c), $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$ ce qui montre que $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$. L'encadrement est donc vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$. Puisque g est croissante sur $[0, \alpha]$, on en déduit que $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha)$ ou encore $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ et en particulier $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.}$$

2) Ainsi d'une part, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'autre part, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \alpha$ ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par α. En résumé la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée et donc converge.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

3) Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en ℓ. On en déduit que quand n tend vers $+\infty$, $g(u_n)$ tend vers $g(\ell)$. Par suite

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell).$$

Ainsi, le réel ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$. La question II)2) permet alors d'affirmer que $\ell = \alpha$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$$

4) On a $u_0 = 0$ puis $u_1 = 0,5$. La machine fournit alors $u_2 = 0,5663110032\ldots$, $u_3 = 0,567143165\ldots$ et finalement

$$\boxed{u_4 = 0,567143 \text{ arrondi à la sixième décimale.}}$$

