BACCALAUREAT GENERAL

Session de Novembre 2006
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1) La probabilité qu'un animal choisi au hasard dans le cheptel soit malade est égale à $\dfrac{5}{1000}$.

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,
- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'animal est malade » avec une probabilité $p = 0,005$ (d'après 2.) ou « l'animal n'est pas malade » avec une probabilité $1 - p = 0,995$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,005$.
On sait alors que

$$E(X) = np = 10 \times \frac{5}{1000} = 0,05.$$

$$\boxed{E(X) = 0,05.}$$

b) L'événement A est l'événement $X = 0$.

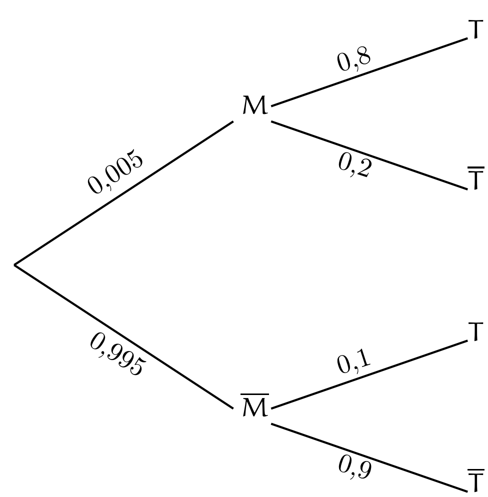
$$p(A) = p(X = 0) = \binom{10}{0}(0,005)^0(0,995)^{10} = (0,995)^{10}.$$

Ensuite, l'événement B est l'événement contraire de l'événement A et donc

$$p(B) = 1 - p(A) = 1 - (0,995)^{10}.$$

$$\boxed{p(A) = (0,995)^{10} = 0,951 \text{ à } 10^{-3} \text{ près et } p(B) = 1 - (0,995)^{10} = 0,048 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

3) a) On a $p_M(\overline{T}) = 1 - p_M(T) = 1 - 0,8 = 0,2$ et $p_{\overline{M}}(T) = 1 - p_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - 0,9 = 0,1$. On peut alors représenter la situation par un arbre.



b) Tout d'abord $p_{\overline{M}}(T) = 1 - p_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - 0,9 = 0,1$. Mais alors, d'après la formule des probabilités totales

$$p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M}) = p(M) \times p_M(T) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 = 0,1035.$$

$$\boxed{p(T) = 0,1035.}$$

c) La probabilité demandée est $p_T(M)$. Or,

$$p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0,005 \times 0,8}{0,1035} = \frac{8}{207} = 0,038 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$\boxed{p_T(M) = \frac{8}{207} = 0,038 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

EXERCICE 2

1. L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est $z' = e^{i\pi/3}z$ ou encore

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z.$$

Par suite,

$$z_B = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\boxed{z_B = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i.}$$

2. Ensuite,

$$z_C = e^{i\pi/3}z_B = e^{i\pi/3} \times e^{i\pi/3}z_A = 3e^{2i\pi/3} = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i,$$

puis

$$z_D = e^{i\pi/3}z_C = e^{i\pi/3} \times 3e^{2i\pi/3} = 3e^{i\pi} = -3,$$

puis

$$z_E = e^{i\pi/3}z_D = e^{i\pi/3} \times 3e^{i\pi} = 3e^{4i\pi/3} = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i,$$

et enfin,

$$z_F = e^{i\pi/3}z_E = e^{i\pi/3} \times 3e^{4i\pi/3} = 3e^{5i\pi/3} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\boxed{z_C = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ z_D = -3,\ z_E = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_F = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.}$$

3. **a)** $z'_F = e^{i\pi/3}z_F = e^{i\pi/3} \times 3e^{5i\pi/3} = 3e^{2i\pi} = 3 = z_A$. Donc

$$\boxed{r(F) = A.}$$

b) On a $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = |z_E| = |z_F| = 3$ et donc les points A, B, C, D E et F sont sur le cercle de centre O et de rayon 3. De plus,

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}\right) = \left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}\right) = \left(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

et donc l'hexagone $ABCDEF$ est régulier.

$$\boxed{ABCDEF \text{ est un hexagone régulier de centre } O.}$$

4. **a)** Puisque $\mathsf{F} \neq \mathsf{E}$ et $\mathsf{C} \neq \mathsf{E}$, s' existe et est unique. Le rapport k de s' et l'angle θ de s' sont

$$k = \frac{s'(E)s'(F)}{EF} = \frac{EC}{EF} \text{ et } \theta = \left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{s'(E)s'(F)}\right) = \left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EC}\right).$$

Or,

$$z_{\overrightarrow{EC}} = z_C - z_E = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = 3\sqrt{3}i,$$

et

$$z_{\overrightarrow{EF}} = z_F - z_E = \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = 3.$$

Donc

$$\frac{z_{\overrightarrow{EC}}}{z_{\overrightarrow{EF}}} = \frac{3\sqrt{3}i}{3} = \sqrt{3}i.$$

On en déduit que

$$k = \frac{EC}{EF} = \frac{|z_{\overrightarrow{EC}}|}{|z_{\overrightarrow{EF}}|} = \left|\sqrt{3}i\right| = \sqrt{3} \text{ et } \theta = \left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EC}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{EC}}}{z_{\overrightarrow{EF}}}\right) = \arg\left(\sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

$$\boxed{s' \text{ est la similitude directe de centre E, de rapport } \sqrt{3} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

s est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et s' est une similitude directe de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On sait alors que $s' \circ s$ est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$.

$$\boxed{s' \circ s \text{ est une similitude de rapport } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et d'angle } \frac{5\pi}{6}.}$$

b) Puisque $AF = AO = \frac{1}{2}AD$ et que $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, on a $s(D) = F$. Mais alors

$$s' \circ s(D) = s'(F) = C.$$

$$\boxed{s' \circ s(D) = C.}$$

c) Puisque $s' \circ s$ est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{6}$, l'expression complexe de $s' \circ s$ est de la forme

$$z' = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{5i\pi/6}z + a = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + a = \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z + a,$$

où a est un nombre complexe. Maintenant

$$s' \circ s(D) = C \Rightarrow -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = -3\left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) + a \Rightarrow a = -\frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)i = -\frac{15}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i.$$

$$\boxed{\text{L'expression complexe de } s' \circ s \text{ est } z' = \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z - \frac{15}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i.}$$

5. **a)** Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a $s = r \circ h$.
Puisque C est le milieu du segment $[AA']$, on a $h(A') = C$ et puisque le triangle ACE est équilatéral direct, on a $r(C) = E$. Par suite, $s(A') = r(h(A')) = r(C) = E$.

$$\boxed{s(A') = E.}$$

Mais alors,

$$s' \circ s(A') = s'(s(A')) = s'(E) = E.$$

$$\boxed{s' \circ s(A') = E.}$$

b) L'expression complexe de la symétrie centrale de centre Ω d'affixe ω est $z' = 2\omega - z$ et donc

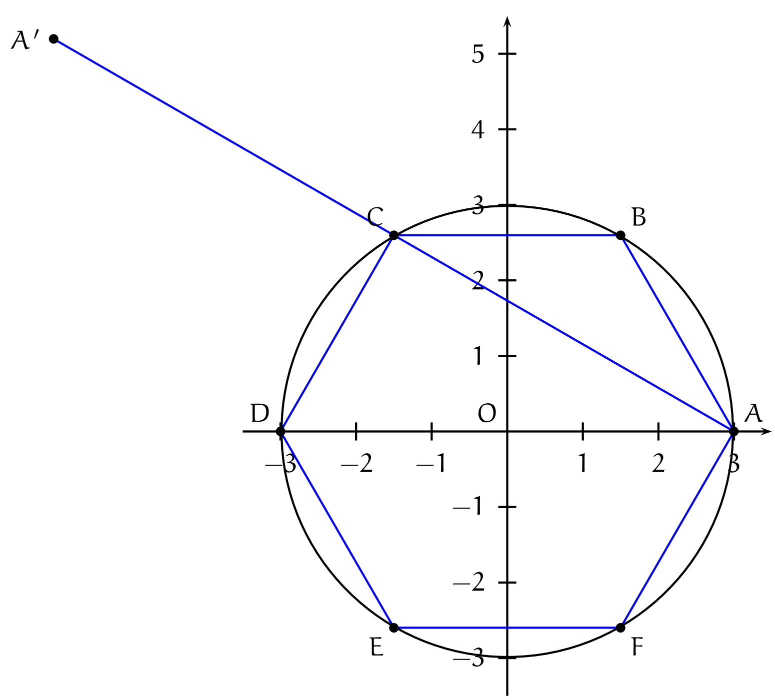
$$z_{A'} = 2z_C - z_A = 2\left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) - 3 = -6 + 3\sqrt{3}i.$$

Mais alors

$$\begin{aligned} z_{s' \circ s(A')} &= \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\left(-6 + 3\sqrt{3}i\right) - \frac{15}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i = \frac{18}{4} - \frac{9}{4} - \frac{15}{4} + \left(-\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{6\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)i \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i = z_E, \end{aligned}$$

et on retrouve

$$\boxed{z_{s' \circ s(A')} = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i = z_E.}$$



EXERCICE 3

1) a) • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x + \dfrac{1}{x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \dfrac{1}{x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ et donc la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

• La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, pour $x > 0$,

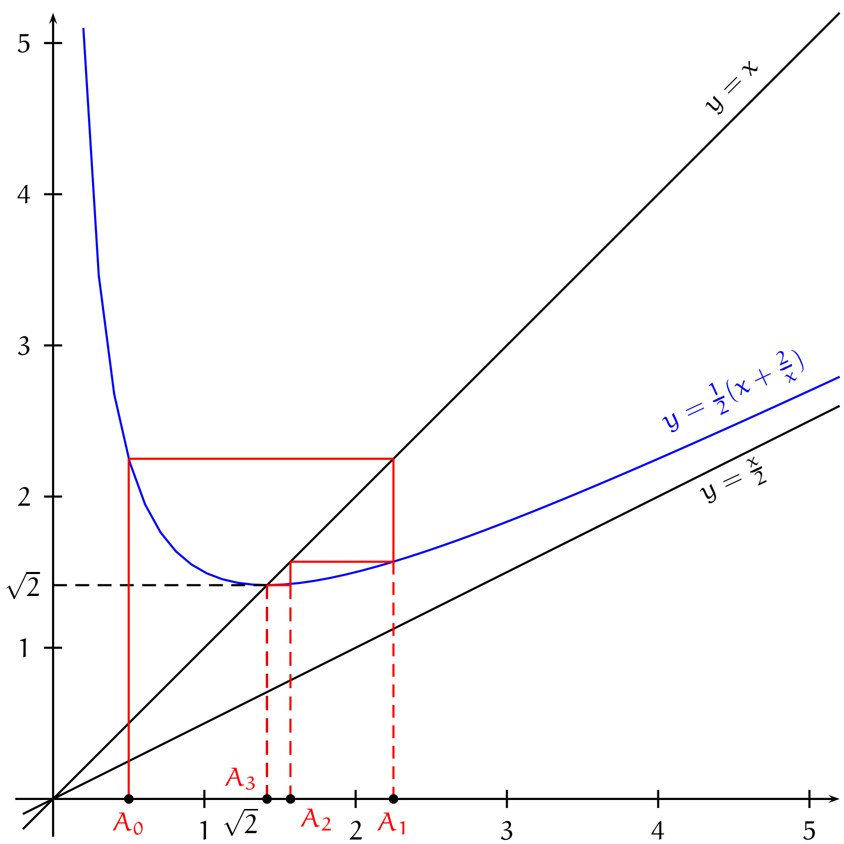
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}.$$

Pour $x > 0$, on a $\dfrac{x+\sqrt{2}}{2x^2} > 0$. Par suite, pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - \sqrt{2}$. On en déduit le tableau de variations de f,

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

• $f(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

• Graphe de f.



b) Voir graphique ci-dessus

2) **a)** Montrons tout d'abord que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$. C'est vrai pour $n = 0$ et si pour $n \geq 0$ donné, u_n existe et $u_n > 0$, alors u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$. Le résultat est donc démontré par récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}}\right) - \sqrt{2} = \frac{u_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}u_{n-1} + 2}{2u_{n-1}} = \frac{(u_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2u_{n-1}}.$$

On en déduit que $u_n - \sqrt{2} \geq 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n \geq \sqrt{2}.}$$

b) Soit $x \in [\sqrt{2}, +\infty[$.

$$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - x = \frac{x^2+2}{2x} - x = \frac{x^2 + 2 - 2x^2}{2x^2} = \frac{2 - x^2}{2x^2} = \frac{(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}{2x^2}.$$

Puisque $x \geq \sqrt{2}$, cette expression est négative et donc $f(x) \leq x$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \geq \sqrt{2},\ f(x) \leq x.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question a), on a $u_n \geq \sqrt{2}$ et donc d'après la question b), on a

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n.$$

On a montré que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} \leq u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

d) La suite (u_n) décroît à partir du rang 1 et est minorée par $\sqrt{2}$. On en déduit que la suite (u_n) converge vers un certain réel $\ell \geq \sqrt{2}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge.}}$$

3) On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. Puisque ℓ n'est pas nul, on obtient

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right).$$

Maintenant,

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \Leftrightarrow 2\ell^2 = l^2 + 2 \Leftrightarrow \ell^2 = 2 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{2} \text{ (car } \ell > 0).$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}.}$$

EXERCICE 4

Première partie

Réponses.

1. **Réponse c)**

2. **Réponse d)**

3. **Réponse b)**

4. **Réponse c)**

5. **Réponse b)**

Explications.

1.

$$7x_A + 4y_A - 3z_A + 9 = -3 \times 3 + 9 = 0 \text{ et donc } A \in (P_1).$$

$$7x_B + 4y_B - 3z_B + 9 = 7 \times 2 - 3 \times 4 + 9 = 11 \neq 0 \text{ et donc } B \notin (P_1).$$

$$7x_C + 4y_C - 3z_C + 9 = 7 \times (-1) + 4 \times 1 - 3 \times 2 + 9 = 0 \text{ et donc } C \in (P_1).$$

$$7x_D + 4y_D - 3z_D + 9 = 7 \times 1 + 4 \times (-4) + 9 = 0 \text{ et donc } D \in (P_1).$$

Enfin, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-1, 1, -1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$ sont $(1, -4, -3)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas proportionnelles et donc les points A, C et D ne sont pas alignés. Les points A, C et D définissent donc un unique plan : le plan (P_1).

2. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (\Delta_1) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = -8 + 2t \\ z = -10 + 5t \end{array}\right. .$$

Etudions alors l'appartenance du point A à la droite (Δ_1). Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{l} -1 + t = x_A \\ -8 + 2t = y_A \\ -10 + 5t = z_A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 + t = 0 \\ -8 + 2t = 0 \\ -10 + 5t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \\ t = \dfrac{13}{5} \end{array}\right. .$$

Ce système d'inconnue t n'a pas de solution et donc $A \notin (\Delta_1)$. De même

$$\left\{\begin{array}{l} -1 + t = x_B \\ -8 + 2t = y_B \\ -10 + 5t = z_B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 + t = 2 \\ -8 + 2t = 0 \\ -10 + 5t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 4 \\ t = \dfrac{14}{5} \end{array}\right. .$$

Ce système d'inconnue t n'a pas de solution et donc $B \notin (\Delta_1)$.

$$\left\{\begin{array}{l} -1 + t = x_C \\ -8 + 2t = y_C \\ -10 + 5t = z_C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 + t = -1 \\ -8 + 2t = 1 \\ -10 + 5t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{9}{2} \\ t = \dfrac{12}{5} \end{array}\right. .$$

Ce système d'inconnue t n'a pas de solution et donc $C \notin (\Delta_1)$.

$$\begin{cases} -1+t = x_D \\ -8+2t = y_D \\ -10+5t = z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+t = 1 \\ -8+2t = -4 \\ -10+5t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Ce système d'inconnue t admet la solution $t = 2$ et donc $D \in (\Delta_1)$.

3. Un vecteur directeur de (Δ_1) est $\overrightarrow{u}_1(1, 2, 5)$ et un vecteur normal à (P_1) est $\overrightarrow{n}_1(7, 4, -3)$. On a

$$\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{n}_1 = 1 \times 7 + 2 \times 4 + 5 \times (-3) = 0,$$

et donc la droite (Δ_1) est parallèle au plan (P_1). Ainsi, a) ou b) est vrai et c) et d) sont faux.

Soit alors $M(-1+t, -8+2t, -10+5t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de (Δ_1). Etudions l'appartenance de M à (P_1).

$$7(-1+t) + 4(-8+2t) - 3(-10+5t) + 9 = 0.$$

Donc, tout point de (Δ_1) appartient à (P_1) ou encore $(\Delta_1) \subset (P_1)$.

4. Un vecteur directeur de (Δ_2) est $\overrightarrow{u}_2(2, 4, -1)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ ne sont pas proportionnelles et donc $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que (Δ_1) et (Δ_2) ne sont pas parallèles et sont donc soit sécantes soit non coplanaires.

Etudions alors l'intersection de (Δ_1) et (Δ_2). Soit $M(-1+t, -8+2t, -10+5t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (Δ_1).

$$M \in (\Delta_2) \Leftrightarrow \text{il existe } t' \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} 7+2t' = -1+t \\ 8+4t' = -8+2t \\ 8-t' = -10+5t \end{cases} \Leftrightarrow \text{il existe } t' \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} t' = 18-5t \\ 7+2(18-5t) = -1+t \\ 8+4(18-5t) = -8+2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } t' \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} t' = 18-5t \\ t = \dfrac{44}{11} \\ t = \dfrac{88}{22} \end{cases} \Leftrightarrow \text{il existe } t' \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} t' = 18-5t \\ t = 4 \end{cases}$$

Ce système d'inconnue t' et de paramètre t a une solution quand $t = 4$. Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont donc sécantes en le point de coordonnées $(-1+4, -8+2\times 4, -10+5\times 4)$ ou encore $(3, 0, 10)$.

5. Un vecteur normal à (P_1) est $\overrightarrow{n}_1(7, 4, -3)$ et un vecteur normal à (P_2) est $\overrightarrow{n}_2(1, -2, 0)$. $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ ne sont pas colinéaires et donc (P_1) et (P_2) sont sécants en une droite (Δ). Soit $\overrightarrow{u}(a, b, c) \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur directeur de (Δ).

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a+4b-3c = 0 \\ a-2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 7(2b)+4b-3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = 6b \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}(2, 1, 6)$ est donc un vecteur directeur de (Δ) ce qui montre déjà que les réponses c) et d) sont fausses. Ensuite, la droite de la proposition a) passe par le point de coordonnées $(0, -2, 0)$. Or, $0 \times 0 - 2 \times (-2) = 4 \neq 0$. Ce point n'est donc pas dans (P_2) et la réponse a) est fausse. Enfin, la droite de la proposition b) passe par le point $A(0, 0, 3)$. De plus,

$$7 \times 0 + 4 \times 0 - 3 \times 3 + 9 = 0 \text{ et } 0 \times 0 - 2 \times 0 = 0.$$

Le point A appartient donc à (P_1) et à (P_2) et la réponse b) est vraie.

Deuxième partie

1. Les coordonnées de M sont $(x_A + a x_{\overrightarrow{u}}, y_A + a y_{\overrightarrow{u}}, z_A + a z_{\overrightarrow{u}})$ ou encore

$$\boxed{M(a, 0, 3-a).}$$

De même, les coordonnées de M' sont $(x_B + b x_{\overrightarrow{v}}, y_B + b y_{\overrightarrow{v}}, z_B + b z_{\overrightarrow{v}})$ ou encore

$$\boxed{M'(2, b, 4+b).}$$

Enfin, les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ sont $(x_{M'} - x_M, y_{M'} - y_M, z_{M'} - z_M)$ ou encore

$$\boxed{\overrightarrow{MM'}(2-a, b, a+b+1).}$$

2.

$$\left\{\begin{array}{l}(MM')\perp(D)\\(MM')\perp(D')\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u}=0\\\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{v}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}1\times(2-a)-1\times(a+b+1)=0\\1\times b+1\times(a+b+1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2a+b=1\\a+2b=-1\end{array}\right.$$

3. Soient a et b deux réels.

$$\left\{\begin{array}{l}2a+b=1\\a+2b=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b=1-2a\\a+2(1-2a)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\b=-1\end{array}\right. .$$

Ainsi, il existe un et un seul couple de points (M, M') tel que $M \in (D)$, $M' \in (D')$, $(MM')\perp(D)$ et $(MM')\perp(D')$. Ces points sont notés H et H' et sont obtenus quand $a = 1$ et $b = -1$:

$$\boxed{H(1,0,2) \text{ et } H'(2,-1,3).}$$

Enfin, $HH' = \sqrt{(x_{H'} - x_H)^2 + (y_{H'} - y_H)^2 + (z_{H'} - z_H)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

$$\boxed{HH' = \sqrt{3}.}$$

4. a) On a $\overrightarrow{MM'}(2-a, b, a+b+1)$. Donc,

$$\begin{aligned}MM'^2 &= (2-a)^2 + b^2 + (a+b+1)^2 = 4 - 4a + a^2 + b^2 + (a+b)^2 + 2(a+b) + 1\\&= (a+b)^2 + a^2 - 2a + b^2 + 2b + 5 = (a+b)^2 + (a-1)^2 - 1 + (b+1)^2 - 1 + 5\\&= (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ de } (D) \text{ et tout point } M' \text{ de } (D'),\ MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3.}$$

b) L'expression précédente est minimum quand $a = 1$ et $b = -1$ car dans ce cas, les trois carrés sont nuls ou encore la distance MM' est minimale lorsque $M = H$ et $M' = H'$.

